公务员录用考试名师微魔块Ⅲ教材（15）

4.0版 微魔块

数量考霸8堂课

审定 华图公务员考试研究院

编著 华图教育

红旗出版社
RED FLAG PRESS

序　言

拿到这本书，说明你是一个讲究策略、追求效率的聪明人。

我来跟你说几句走心的话。

——这本书为何存在？

书太厚，题太多，时间碎，效率低，这几乎是每个考生的备考阻力。全天性系统的复习固然是最扎实稳妥的路数，只是这么奢侈的复习方式似乎并不现实，如果能吃透考情，只学很可能会考的、抛弃很可能不考的，这就事半功倍了——于是这套书应运而生。如果你来不及细嚼慢咽啃教材，那么恭喜你，你手上的这本书同样能让你在考场上风生水起；如果你已经在进行系统的复习，这本书将会助你对考试精准把脉，针对各模块进行精细的专项分析，你将在考场上冲击高分，超越目标！

——这本书怎么用？

欧阳修有“三上法”，乃马上、枕上、厕上也。这本书实为“三上定制”，小巧雅致却字字珠玑、句句精要，它不需要你正襟危坐、刺股悬梁，你可以或躺或站或逸态横生，随时翻开随时放下，开合之间已洞悉考点要义。因为精要，所以复习不再疲劳；因为小巧，所以复习随时随地；因为身怀利器，所以自信从容。

高分从来就不是埋头苦读者的专属，学习要讲效率，考试要讲方法。“工欲善其事，必先利其器”，这套“微魔块”就是我们倾全力为你打造的一把神兵利器。你的理想背后从来都不是你一个人，我们在路上从未停歇，只为和你一起共创辉煌。

编者　2016 年 2 月于北京

目　录

第一堂 ★★★★初等数学

在公务员考试中，有些数学运算题目是我们初中所学过的最基本的模型，比如约数倍数、整除余数、周期等等，这些题目非常简单，属于必得分题目。要知道公务员考试中行政职业能力测验分数很难拉开很大的差距，如果想在笔试中领先，行测拿到 75^{+} 的分数是很必要的。显然，初等数学的分数拿不到，这个愿望基本达不到。

一、最大公约数与最小公倍数

1.如果数 a 能被数 b 整除，a 就叫做 b 的倍数，b 就叫做 a 的约数。几个整数公有的约数，叫做这几个数的公约数；其中最大的一个，叫做这几个数的最大公约数。例如：4 是 12 与 16 的最大公约数。(公约数最大，意味着商最小，常用来求至少类问题)

2.几个自然数公有的倍数，叫做这几个数的公倍数，其中最小的一个自然数，叫做这几个数的最小公倍数。例如：4 和 6 的最小公倍数是 12。(常用来计算最小周期类问题)

3.约数与倍数常涉及整除的概念。因此我们需要记忆一些特殊数的整除判定方式：

看末一位或末几位数字

(1)能被 2 整除的数的特征：个位数字是 0、2、4、6、8 的整数，都能被 2 整除；

(2)能被 5 整除的数的特征：个位数字是 0 或 5 的整数，都能被 5 整除；

(3)能被 $2^2(5^2)$ 整除的数的特征：一个整数的末两位能被 $2^2(5^2)$ 整除，这个数就能被 $2^2(5^2)$ 整除；

(4)能被 $2^3(5^3)$ 整除的数的特征：一个整数的末三位能被 $2^3(5^3)$ 整除，这个数就能被 $2^3(5^3)$ 整除。

看各位数字的和

能被 3(9) 整除的数的特征：如果一个整数的各位数字之和能被 3(9) 整除，则这个数就能被 3(9) 整除；反之，一个数能被 3(9) 整除，这个数各位数字之和就能被 3(9) 整除。

看两部分数字之差

能被 11 整除的数的特征：如果一个整数奇数位上的数字和与偶数位上的数字和的差能被 11 整

除，这个数就能被 11 整除；反过来也成立。

看两部分数字组成的数的差

能被 7、11、13 整除的数的特征：这个数末三位与末三位之前的数字所组成的数之差（或反过来）能被 7、11、13 整除。

性质

(1)如果整数 a、b 都能被自然数 c 整除，那么 a、b 的和或差也能被 c 整除；

(2)如果 a 能被 b 整除，那么 $a\times c$（c 是整数）也能被 b 整除；

(3)如果 a 能整除 b，b 能整除 c，那么 a 能整除 c；

(4)如果 b 与 c 是互质数，并且 a 能同时被 b、c 整除，那么 a 能被 $b\times c$ 整除。

【例题】六位数 568__ ___ 能被 3、4、5 整除，则最小的六位数是（　　）。①

【例题】六位数__1998__ 能被 56 整除，则这个数是（　　）。②

约数个数

如果将一个数字进行质因数分解，把各个质因数的幂次数字分别加 1，再相乘，得到的数字就是这个数字的约数的个数。

【例 1】某公司规定，门窗每 3 天擦拭一次，绿化植物每 5 天浇一次水，消防设施每 2 天检查一次。如果上述三项工作刚好集中在星期三都完成了，那么下一次三项工作集中在同一天完成是在（　　）。

A. 星期一　　B. 星期二　　C. 星期四　　D. 星期五

【解析】5、3、2 的最小公倍数是 30，也就是 30 天后三项工作同一天完成。30÷7＝4…2，也就相当于从星期三顺次再数两天，星期三两天后是星期五，所以选 D。

---

① 答案：568020。提示：将 568＊＊＊暂时赋值为 568000，除以 3、4、5 的最小公倍数 60，将余数加上一个数即 20，凑成余数基础上，60 的最小公倍数即可。

② 答案：319984。提示：将 56 化为 7×8，根据“如果 a 能整除 b，b 能整除 c，那么 a 能整除 c”的原理，则未知的六位数既可以被 7 整除，也可以被 8（也即 2^3）整除。这个数同时具有能被 7 和 2^3 整除的数的性质。

【例 2】对 100 个编号为 1—100 的罐子,第 1 个人在所有的编号为 1 的倍数的罐子中倒入 1 毫升水,第 2 个人在所有编号为 2 的倍数的罐子中倒入 1 毫升水……最后第 100 个人在所有编号为 100 的倍数的罐子中倒入 1 毫升水,问此时第 92 号罐子中装了多少毫升的水?(　　)

A. 2　　B. 6　　C. 46　　D. 92

【解析】92 号罐子中有多少毫升水,取决于有多少人往里面倒水,也就是 92 有多少个约数。每有 1 个约数,便会有 1 个对应的人倒入 1 毫升水。运用约数个数的公式,我们将 92 写成 $2^2\times23^1$,所以约数个数为 $(2+1)\times(1+1)=6$ 个。所以 92 号罐子中装了 6 毫升的水。选 B。

【例 3】有一种红砖,长 24 厘米,宽 12 厘米,高 5 厘米,至少用多少块红砖才能拼成一个实心的正方体?(　　)

A.600 块　　B. 800 块　　C. 1000 块　　D. 1200 块

【解析】实心的正方体,边长最好是砖各边的最小公倍数。24、12、5 的最小公倍数是 120。也就是最小的正方体边长是 120,这时候长宽高对应砖的块数分别有 5、10、24 块。所以需要砖 $5\times10\times24=1200$ 块。选 D。

二、余数及尾数判定

1.余数问题口诀

余同取余,和同加和,差同减差,公倍数作周期。

(1)余同:"一个数除以 4 余 1,除以 5 余 1,除以 6 余 1",则取 1,表示为 $60n+1$;

(2)和同:"一个数除以 4 余 3,除以 5 余 2,除以 6 余 1",则取 7,表示为 $60n+7$;

(3)差同:"一个数除以 4 余 1,除以 5 余 2,除以 6 余 3",则取 -3,表示为 $60n-3$。

选取的这个数加上除数的最小公倍数的任意整数倍(即例中的 $60n$)都满足条件。

2.乘方尾数口诀

底数只保留个位,指数除以 4 留余数,余数为 0 则换成 4。此时所得新数的尾数即为原数的尾数。

比如 2013^{2013},指数 2013 除以 4 余数是 1,$3^1=3$,所以 2013^{2013} 的尾数是 3。

解决尾数问题常用到以下结论:

(1)两个正整数乘积的尾数等于它们尾数的乘积的尾数；

(2)一个正整数的乘方的尾数常常是按一定规律循环出现。

【例 1】1999^{1998} 的末位数字是(　　)。

A.1　　B.3　　C.7　　D.9

【解析】直接计算让人无从下手。这类问题的核心在于,整个数乘方的尾数与末位数乘方的尾数是相同的,即 1999^{1998} 的尾数与 9^{1998} 的尾数是完全相同的,而 9 的乘方尾数是 9、1 循环的,故我们只需判断 1998 次方是落在哪个循环节上,1998 能被 2 整除,因此尾数一定为 1,可知 A 是正确答案。

这样做虽然快,但 1—9 这 9 个数的尾数循环是不同的,有的是 1 个一循环,有的是 2 个一循环,有的是 4 个一循环,若每次都先考虑尾数是几个一循环是非常麻烦的,而若强行记忆又容易出现错误。所以我们尝试寻求一个更好的方法。我们知道:

1 的乘方尾数是 1、1、1、1 循环;

2 的乘方尾数是 2、4、8、6 循环;

3 的乘方尾数是 3、9、7、1 循环;

4 的乘方尾数是 4、6、4、6 循环;

5 的乘方尾数是 5、5、5、5 循环;

6 的乘方尾数是 6、6、6、6 循环;

7 的乘方尾数是 7、9、3、1 循环;

8 的乘方尾数是 8、4、2、6 循环;

9 的乘方尾数是 9、1、9、1 循环;

列表后容易发现,这 9 个数的乘方尾数都可以看做是 4 次一循环,这就大大降低了记忆难度,于是做这类乘方尾数问题,我们只需要求出其指数除以 4 的余数,余数是几,则代表落在哪个循环节上(注意:若余数为 0,则代表能被 4 整除,则应落在第 4 循环节,即余数为 0 则看作 4);同时一个数除以 4 的余数和这个数的末两位数除以 4 的余数是相同的。

综上,我们给出一个口诀:"底数留个位;指数末两位除以 4 留余数(余数为 0,则看做 4)"。

3.三位数书页问题换算公式

三位数的页码是考试的重点：页码＝共使用的数字÷3＋36。

◆若一本书一共有 N 页（N 为三位数），用了 M 个数字：

从第 1 页到第 9 页，共 9 页，9 个数字；

从第 10 页到第 99 页，共 90 页，$90\times2=180$ 个数字；

从第 100 页到第 N 页，共有 $[3\times(N-100+1)]$ 个数字；

依上可知：$M=3\times(N-100+1)+9+180$，得到：$N=M\div3+36$。

【例 1】某生产车间有若干名工人，按每四个人一组分多一个人，按每五个人一组分也多一个，按每六个人一组分还是多一个，该车间至少有多少名工人？（　　）

A. 31　　B. 41　　C. 61　　D. 122

【解析】题目可以还原为余数问题：一个数除以 4 余 1，除以 5 余 1，除以 6 也余 1。这样的数有无数多个，最小的数就是 4、5、6 的最小公倍数加 1（余同取余）。4、5、6 最小公倍数是 60，所以至少有 61 名工人。选 C。

【例 2】韩信故乡淮安民间流传着一则故事——“韩信点兵”。秦朝末年，楚汉相争。有一次，韩信率 1500 名将士与楚军交战，战后检点人数，他命将士 3 人一排，结果多出 2 名；命将士 5 人一排，结果多出 3 名；命将士 7 人一排，结果又多出 2 名，用兵如神的韩信立刻知道尚有将士人数。已知尚有将士人数是下列四个数字中的一个，则该数字是（　　）。

A. 868　　B. 998　　C. 1073　　D. 1298

【解析】本题也就是剩下的将士人数除以 3 余 2，除以 5 余 3，除以 7 余 2，不同余、不同和，也不同差。这下怎么算呢？我们可以把选项一一代入，看哪一项满足条件。选 C。

【例 3】在一本 300 页的书中，数字“6”在书的页码中出现了多少次？（　　）

A.40　　B.60　　C.80　　D.160

【解析】（思路 1）一共 300 页的书，我们分情况来数。

（6 在个位）06、16、26、36、46、56、66、76、86、96，（6 出现了 11 次）；

(6在个位)106、116、126、136、146、156、166、176、186、196(6出现了11次);
(6在个位)206、216、226、236、246、256、266、276、286、296(6出现了11次);
(6在十位)60、61、62、63、64、65、67、68、69,(66不再计算,出现9次);
(6在十位)160、161、162、163、164、165、167、168、169,(166不再计算,出现9次);
(6在十位)260、261、262、263、264、265、267、268、269,(266不再计算,出现9次);
所以数字6一共出现 $11\times3+9\times3=60$(次)。选B。
(思路2)“6”不可能出现在百位上,我们分个位、十位两种情况进行讨论:
如果“6”在个位上:十位可以取0—9,百位可以取0—2,共出现 $10\times3=30$(次);
如果“6”在十位上:个位可以取0—9,百位可以取0—2,共出现 $10\times3=30$(次)。
综上,“6”一共出现了 $30+30=60$(次)。选B。

三、裂项公式

1.对于分母可以写成两个因数乘积形式的分数,即 $\frac{1}{a\times b}$ 形式的,我们把较小的数写在前面,即 $a<b$,那么则有 $\frac{1}{a\times b}=(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})\times\frac{1}{b-a}$。

2.对于分母上为3个或4个连续自然数乘积形式的分数,则有

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$$

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{n(n+1)(n+2)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right]$$

3.分数裂和公式

$$\frac{a+b}{a\times b}=\frac{1}{b}+\frac{1}{a};\qquad \frac{a^2+b^2}{a\times b}=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$$

4.整数裂项公式

$$1\times 2+2\times 3+3\times 4+\cdots+(n-1)n=\frac{1}{3}(n-1)n(n+1)$$

$$1\times 2\times 3+2\times 3\times 4+3\times 4\times 5+\cdots+(n-2)(n-1)n=\frac{1}{4}(n-2)(n-1)n(n+1)$$

这种题目在考试中一般很少遇到,知道这些公式就可以。

四、方程

公务员考试中常遇到的是一元一次方程、二元一次方程以及不等式,基本是常用的解题方法,很少遇到一元二次方程。很多考友费心备考一元二次方程,没有什么必要,考试中时间也有限,能全部做完题目的极少,遇到放弃也无妨。

第二堂　★★★★典型模型

典型模型:行程问题

在每年的公务员考试中,不论是国考还是省考,行程问题始终是最常见的数学运算题。这种题型复杂多变,但是常用公式就几条,属于必得分题目。

一、知识点记忆

1.行程问题核心公式:路程=速度×时间

在行程问题里,如果路程、速度、时间三个变量只有一个出现了具体的大小,那么另外两个变量,我们可以假设其中一个为任意值。如果其中两个变量都出现了具体的大小,意味着第三个变量大小也就确定了。

2.行程问题基本比例:$\frac{S_{甲}}{S_{乙}}=\frac{v_{甲}}{v_{乙}}\times\frac{t_{甲}}{t_{乙}}$

若 t 相等,S 与 v 成正比;v 相等,S 与 t 成正比;S 相等,v 与 t 成反比。

3.直线相遇问题:相遇距离=(大速度+小速度)×相遇时间

直线追及问题:追及距离=(大速度-小速度)×追及时间

直线背离问题:背离距离=(大速度+小速度)×背离时间

4.环形反向运动:第 N 次相遇路程和为 N 个周长,环形周长=(大速度+小速度)×相遇时间

环形同向运动:第 N 次相遇路程差为 N 个周长,环形周长=(大速度-小速度)×相遇时间

5.顺流路程=顺流速度×顺流时间=(船速+水速)×顺流时间

逆流路程=逆流速度×逆流时间=(船速-水速)×逆流时间

(涉及相对速度的,比如扶梯问题、队伍行进问题,本质上都是顺流逆流问题,注意相对速度与相对路程)

6.等距离平均速度公式：$V_{均}=\frac{2v_1v_2}{v_1+v_2}$

7.1 米/秒＝3.6 千米/时

其他还有些典型问题也有固定的公式，不过记忆比较麻烦，一般采取在例题中通过推导过程来理解记忆，那样即使没有记住公式，在考试时通过简单推导也能准确计算出答案。

二、常考题型

1.求解单一量

主要是已经知道 S、v、t 三个量中的两个，或者知道比例关系，要求求出第三个量。这种题型主要围绕公式通过列方程来求解。

【例 1】甲地到乙地，步行比骑车速度慢 75%，骑车比公交慢 50%。如果一个人坐公交从甲地到乙地，再从乙地步行到甲地，共用 1 个半小时。问骑车从甲地到乙地多长时间？（　　）

A.10 分钟　　　　B.20 分钟

C.30 分钟　　　　D.40 分钟

【解析】题目仅明确了时间，速度只给了比例关系，路程也未知，所以我们可以给速度赋予具体值。假设骑车速度是 4，则步行是 1，公交是 8（这道题步行和公交都是和骑车发生联系，显然设中间量骑车更便于解题），依题意可得：$\frac{S}{8}+\frac{S}{1}=90$（注意量的转化，答案中的量是“分钟”，所以我们直接将 1.5 小时转化为 90 分钟，以免考场上速度过快最后忘记转化为分钟）。求得 S＝80。所以骑车从甲地到乙地需要 80÷4＝20（分钟）。选 B。

【例 2】甲与乙同时从 A 地出发匀速跑向 B 地，跑完全程分别用了 3 小时和 4 小时，下午 4 时，甲正好位于乙和 B 地之间的中点上，问两人是下午什么时候出发的？（　　）

A.1 点 24 分　　B.1 点 30 分　　C.1 点 36 分　　D.1 点 42 分

【解析】这道题难点在于找到等量关系，如果仅从两人走过的路程来看，很难建立关系，所以我们不妨倒过来想，“甲正好位于乙和 B 地之间的中点上”，也就是甲到 B 地的路程是乙到 B 地路程的一

半。这样我们就找到了等量关系。

假设全程是 12，已知 $t_{甲}:t_{乙}=3:4$，所以 $v_{甲}=4$，$v_{乙}=3$，令截至下午 4 时，两人走了 x 小时，则 $12-4x=\frac{1}{2}(12-3x)$，解得 $x=2.4$ 时。所以两人应该是下午 $(4-2.4)$ 时出发，1.6 时 = 1 时 36 分。选 C。

【例 3】一个长 146 公里的山区公路分为上坡、平地和下坡三段，其中上下坡的距离相等。某越野车以上坡 20 公里每小时、平地 30 公里每小时、下坡 50 公里每小时的速度行驶，跑完该条公路正好用时 5 小时，问该山路中的平地路程为多少公里？（　　）

A. 40　　B. 55　　C. 66　　D. 75

【解析】显然，尽管这道题也是求解单一量，但与前面两道题不同的是，这道题的全程分为 3 段，每段的速度不同。

根据题意设平地路程为 x 千米，由题意得到等式：$\frac{146-x}{2\times20}+\frac{146x}{2\times50}+\frac{x}{30}=5$，解得 $x=66$。因此山路中的平地路程为 66 千米。选 C。

2.直线相遇/追及问题

有时候对题目中的关系不明确时，可以借助图表。解决行程问题的任何一种题型，寻找等量关系都是关键一步，核心公式就是距离、速度、时间三者的关系。追及问题一定要分清谁追及谁，不要搞混了大小速度。

【例 1】甲、乙两人分别从 A、B 两地同时出发，相向而行，匀速前进。如果每人以一定的速度前进，4 小时相遇；如果各自每小时比原计划少走 1 千米，5 小时相遇。则 A、B 两地的距离是（　　）。

A. 40 千米　　B. 20 千米

C. 30 千米　　D. 10 千米

【解析】典型的相遇问题。相遇距离 =（大速度 + 小速度）× 相遇时间，我们不妨设他们的速度和为 x，4 小时可以相遇，则距离为 $4x$；各自每小时少走 1 千米，则速度和为 $(x-2)$，5 小时相遇，距离为

$5(x-2)$；两地距离相等，所以我们可以得出等量关系：$4x=5(x-2)$，解得 $x=10$，所以距离为 40 千米，选 A。

【例 2】为了保持赛道清洁，每隔 10 分钟会有一辆清扫车从起点出发，匀速清扫赛道。甲、乙两名车手分别驾驶电动车和自行车考察赛道，甲每隔 5 分钟追上一辆清扫车，每隔 20 分钟有一辆清扫车追上乙，问甲的速度是乙的多少倍？（　　）

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

【解析】看上去好复杂的题目。不过仔细剥离题目情景，发现这其实是两个追及问题的合体。我们假设甲的速度是 $v_甲$，乙的速度是 $v_乙$，清扫车的速度是 $v_车$：

单独看甲，每隔 5 分钟追上 1 辆清扫车，显然是追及问题，追及距离是 $10v_车$，时间是 5 分钟，所以得出等式：$(v_甲-v_车)\times5=10v_车$，得出 $v_甲=3v_车$；

单独看乙，每隔 20 分钟有一辆清扫车追上乙，追及距离同样是 $10v_车$，时间是 20 分钟，不同的是乙的速度显然要小于清扫车的速度，所以得出等式：$(v_车-v_乙)\times20=10v_车$，得出 $v_乙=\frac{1}{2}v_车$；

所以甲的速度是乙的 $3\div\frac{1}{2}=6$（倍）。选 D。

【例 3】甲、乙两地相距 20 千米，小李、小张两人分别步行和骑车，同时从甲地出发沿同一路线前往乙地，小李速度为 4.5 千米/小时，小张速度为 27 千米/小时。出发半小时后，小张返回甲地取东西，并在甲地停留半小时后再次出发前往乙地。问小张追上小李时，两人距离乙地多少千米？（　　）

A.8.1　　B.9　　C.11　　D.11.9

【解析】以前会做的题总做错，现在想出避免做错的方法，就是逐个明确题目的数量关系，不再眉毛胡子一把抓，正确率提高很多。比如拿这道题来说，最后说小张追上小李时，两人距乙地多少千米，显然是追及问题。首先明确追及速度，$v_李=4.5$ 千米/小时，$v_张=27$ 千米/小时；追及距离：出发半小时、返回也需要半小时、又停留半小时，一共 1.5 小时，这 1.5 小时小李走了 (4.5×1.5) 千米，所以追及时间为 $\frac{4.5\times1.5}{27-4.5}=0.3$（小时），追上时，小张走了 $27\times0.3=8.1$（千米），小李显然也是这些。所以

距离乙地 20－8.1＝11.9(千米),选 D。

这道题关键就是捋清楚追及距离,记得很多人做题时忽略了小张回去甲地也需要半小时时间,花的时间远远超过 1 分钟却得不出答案。所以,数学运算关键是思路一定要清晰,一步一步地计算。

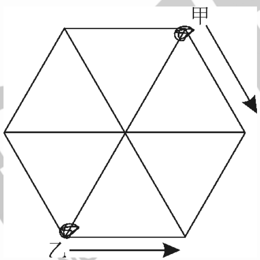
3.环形运动型

环形运动和直线运动类似,可以借助图形来理解,解题的关键一般是距离和或差与环形周长的关系,抓住这点列出等式,解题还是很简单的。

【例 1】一个正六边形跑道,每边长为 100 米,甲乙两人分别从两个相对的顶点同时出发,沿跑道匀速相向而行。第一次相遇时甲比乙多跑了 60 米,问甲跑完三圈时,两人之间的直线距离是多少?(　　)

A.100 米　　B.150 米

C.200 米　　D.300 米

【解析】

通过画图我们知道,第一次相遇,$S_{甲}+S_{乙}=100\times3$;$S_{甲}-S_{乙}=60$。所以 $S_{甲}=180$ 米;$S_{乙}=120$ 米。前面我们讲过比例关系,当时间一定时,路程与速度成正比,所以 $\frac{v_{甲}}{v_{乙}}=\frac{S_{甲}}{S_{乙}}=\frac{3}{2}$。

所以,当甲跑完 3 圈时,乙恰好跑完 2 圈,两人依然处于两个相对的顶点位置,所以直线距离是 100＋100＝200(米)。(正六边形每个对角连线可以将正六边形分割成 6 个正三角形)

【例 2】甲、乙两人从运动场同一起点同时同向出发,甲跑的速度为 200 米/分钟,乙步行,当甲第 5

次超越乙时，乙正好走完第三圈，再过 1 分钟时，甲在乙前方多少米？（　　）

A. 105　　B. 115　　C. 120　　D. 125

【解析】这道题很有意思，题干给出的信息不多，但是经过推导可以轻松得出答案。

首先，两人同向而行，环形运动同向相遇，我们知道每相遇一次，两人路程差便是一个周长。所以第五次相遇时，$S_{甲}-S_{乙}=5c$（c 为跑道周长），乙正好走完第三圈，所以 $S_{甲}=5c+3c=8c$。

其次，两人运动时间相同，当时间相同时，速度与距离成正比，所以 $\frac{v_{甲}}{v_{乙}}=\frac{S_{甲}}{S_{乙}}=\frac{8c}{3c}=\frac{8}{3}$，已知 $v_{甲}=200$ 米/分钟，所以 $v_{乙}=75$ 米/分钟。

最后，甲第五次超越乙，两人处于同一位置，1 分钟后，甲在乙前方的距离：$(v_{甲}-v_{乙})\times1=200-75=125$（米）。选 D。

4.流水行船问题

流水行船只是个模型，主要是速度和差问题，只要我们仔细分辨速度是求和还是求差，就能转化成基本行程问题，相关的还有电梯问题、队伍行进问题等，思路是一样的。

比如电梯问题，扶梯总长一般被描述成“露在外面的扶梯阶数”，如果是顺行，扶梯总长＝人走的梯长＋扶梯走的梯长＝人走的梯长×$(1+\frac{v_{梯}}{v_{人}})$，这个公式其实就是前面公式的变形，因为人走的时间与梯走的时间相同，所以：人走的梯长×$\frac{v_{梯}}{v_{人}}=v_{人}\times t\times\frac{v_{梯}}{v_{人}}=v_{梯}\times t$＝梯走的梯长。

【例 1】一艘货船，第一次顺流航行 420 千米，逆流航行 80 千米，共用 11 小时；第二次用同样的时间顺流航行了 240 千米，逆流航行了 140 千米。问水流速度是多少千米/小时？（　　）

A.12　　B.16　　C.20　　D.24

【解析】因为两种路程时间相同，我们把顺流速度设为 x，逆流速度设为 y，能得到：

$\begin{cases}\dfrac{420}{x}+\dfrac{80}{y}=11\\ \dfrac{240}{x}+\dfrac{140}{y}=11\end{cases}$，解出 $x=60$，$y=20$。顺水速度＝船速＋水速；逆水速度＝船速－水速，我们把两个式子相减，得出：水流速度＝$\dfrac{1}{2}$（顺水速度－逆水速度）＝20。选 C。

当然，这道题也可以分别设出船速和水速，然后再列出方程组，但解析起来不如上面的这种方式更加快捷。

【例 2】某商场在一楼和二楼间安装了自动扶梯，该扶梯以均匀的速度向上行驶。一个男孩与一个女孩同时从自动扶梯走到二楼（扶梯本身也在行驶），假设男孩与女孩都做匀速运动，且男孩每分钟走动的级数是女孩的两倍，已知男孩走了 27 级达到扶梯顶部，而女孩走了 18 级到达扶梯顶部（设男孩、女孩每次只跨一级），则扶梯露在外面的部分共有（　　）级。

A.54　　B.64　　C.81　　D.108

【解析】我们假设女孩每分钟走 a 级，扶梯每分钟走 b 级，则男孩走 $2a$ 级。

不论男孩还是女孩，扶梯总长都等于人走的级数与扶梯走的级数的和。所以：

扶梯长＝$27+\dfrac{27}{2a}\times b=18+\dfrac{18}{a}\times b$，解得：$\dfrac{b}{a}=2$，所以扶梯长＝$27+\dfrac{27}{2a}\times b=54$。选 A。

注意：我们需要求的只是扶梯长，所以不必解出 a 和 b 分别为多少，而且这道题也解不出来。解题时要时刻牢记自己要达到的目标。

【例 3】一列队伍沿直线匀速前进，某时刻一传令兵从队尾出发，匀速向队首前进传送命令，他到达队首后马上原速返回，当他返回队尾时，队伍行进的距离正好与整列队伍的长度相等。问传令兵从出发到最后到达队尾行走的整个路程是队伍长度的多少倍？（　　）

A. 1.5　　B. 2　　C. $1+\sqrt{2}$　　D. $1+\sqrt{3}$

【解析】这道题看上去比较复杂，但我们抓住队伍行进时间与传令兵行进时间相同这个等量关系

就可以。

假设传令兵速度为 $v_{兵}$，队伍行进速度为 $v_{队}$，队伍全长为 S，根据时间相等，可以得出：

$\frac{S}{v_{兵}+v_{队}}+\frac{S}{v_{兵}-v_{队}}=\frac{S}{v_{队}}$，解得：$v_{兵}=(1+\sqrt{2})v_{队}$。

因为传令兵从队尾到队首，再从队头到队尾所用的时间与队伍行进时间相同，而队伍行进的距离是 S，所以传令兵行进的距离是 $(1+\sqrt{2})S$，是队伍行进距离的 $(1+\sqrt{2})$ 倍。选 C。

5.多次相遇型

(1)左右点出发：第 N 次迎面相遇，路程和＝全程×$(2N-1)$；第 N 次追上相遇，路程差＝全程×$(2N-1)$。

(2)同一点出发：第 N 次迎面相遇，路程和＝全程×$2N$；第 N 次追上相遇，路程差＝全程×$2N$。

(3)单岸型两次相遇距离公式：$S=\frac{3S_1+S_2}{2}$；两岸型两次相遇距离公式：$S=3S_1-S_2$（其中 S 表示两岸的距离，S_1、S_2 表示相遇时距离某端点的距离）。单岸指的是题目的数据针对的同一个端点，两岸指的是数据分别针对两端的端点。

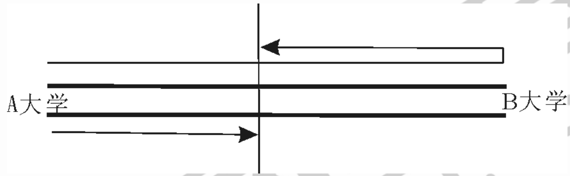
上面的公式死记硬背很容易记混，所以一般采取在考试中画简图来使题目中的关系形象化，上面公式中的几种关系也就一目了然。

【例 1】A 大学的小李和 B 大学的小孙分别从自己学校同时出发，不断往返于 A、B 两校之间。现已知小李的速度为 85 米/分钟，小孙的速度为 105 米/分钟，且经过 12 分钟后两人第二次相遇。问 A、B 两校相距多少米？（　　）

A.1140　　B.980　　C.840　　D.760

【解析】我们如果没有记住左右点出发迎面相遇的公式，通过简图也能清晰地看出来，第二次相遇时，两个人的路程和正好是 3 个全程。所以 A、B 之间的距离＝$\frac{1}{3}(v_{李}+v_{孙})\times t=\frac{1}{3}\times(85+105)\times 12=760$（米）。选 D。

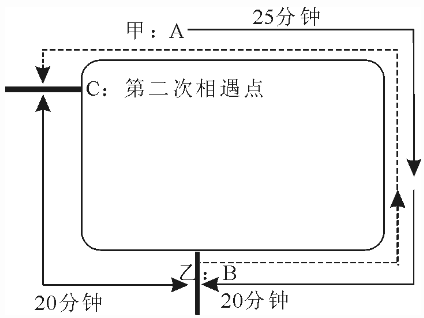
再次强调，如果公式拿不准，考场上不要直接下笔套用拿不准的公式，通过画图等明确关系是不错的选择。



【例 2】甲、乙两人在环湖小路上匀速行驶，且绕行方向不变，19 时，甲从 A 点，乙从 B 点同时出发相向而行，19 时 25 分，两人相遇；19 时 45 分，甲到达 B 点；20 点 5 分，两人再次相遇。乙环湖一周需要多长时间？（　　）

A.72 分钟　　B.81 分钟　　C.90 分钟　　D.100 分钟

【解析】这是一道很有意思的题，初看很难，实际上非常简单，首先我们把时间转化成具体运动的时间 t，第一次相遇，用了 25 分钟；甲到达 *B* 点，又用了 20 分钟；又过了 20 分钟，两个人第二次相遇。为了方便理解，我们只标出甲运行的时间路线图。如图：



求乙环湖一周所用的时间，首先由 B 逆时针到 C，乙运行时间与甲相同，为 25＋20＋20＝65(分钟)，所以我们只需要知道由 C 逆时针到 B 这段路乙需要运行的时间。甲在这段路程运行了 20 分钟。从题干可知，第一次相遇时，乙运行了 25 分钟，而甲用了 20 分钟就由相遇地点到达了 B 点，也就是乙的出发点。同样的路程，甲用 20 分钟，乙用 25 分钟。我们看由 C 逆时针到 B，甲也用了 20 分钟，所以这段路乙需要 25 分钟。因此，乙环湖一周需要 65＋25＝90(分钟)。选 C。

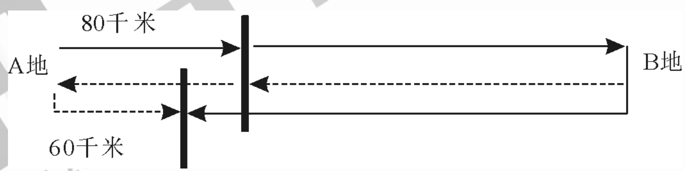
画出图来，一目了然，几乎不需要计算，口算就能得出答案，这就是简图的妙用。

【例 3】甲、乙两车同时从 A、B 两地相向而行，在距 A 地 80 千米处相遇，相遇后两车继续前进，甲车到达 B 地、乙车到达 A 地后均立即按原路返回，第二次在距 A 地 60 千米处相遇。则 A、B 两地间相距(　　)。

A. 130 千米　　B. 150 千米

C. 180 千米　　D. 200 千米

【解析】如图：



第一次相遇，$S_{甲}+S_{乙}=S_{AB}$；第二次相遇，$S_{甲}+S_{乙}=3\cdot S_{AB}$；因为速度不变，所以第二次相遇的时间 $t_2=3\cdot t_1$，第一次相遇时甲走了 80 千米，所以第二次相遇甲走了 80×3＝240 千米。从图示可以看出，第二次相遇时甲差 60 米正好走完两个全程，所以 A、B 两地之间的距离 $S_{AB}=\dfrac{240+60}{2}$＝150(千米)。选 B。

如果记忆比较牢或对题型比较熟悉，本题显然数据都针对 A 点，属于单岸型，我们直接应用单岸

型公式：$S=\frac{3S_1+S_2}{2}=\frac{3\times80+60}{2}=150$(千米)。

公式推导：设第一次相遇地点距离 A 地 S_1，第二次相遇地点距离 A 地 S_2，则：

$$\frac{v_{甲}}{v_{乙}}=\frac{S_1}{S-S_1}=\frac{2S-S_2}{S+S_2}\Rightarrow S=\frac{3S_1+S_2}{2}$$

如果题目给出的不是两次相遇，而是三次或四次，记住就不能用这个公式了，最好是通过图示来分析距离之间的关系。单岸或两岸公式的适用范围仅限于两次相遇，这点要切记！

6.其他题型

(1)一般来说，设每隔 t_1 分钟就遇到迎面开来的一辆公共汽车，每隔 t_2 分钟就有辆公共汽车从后面超过该人，有方程组：

$$\begin{cases}S=(v_{车}+v_{人})\times t_1\\ S=(v_{车}-v_{人})\times t_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}v_{车}=\left(\frac{S}{t_1}+\frac{S}{t_2}\right)\div2\\ v_{人}=\left(\frac{S}{t_1}-\frac{S}{t_2}\right)\div2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}T=\frac{S}{v_{车}}=\frac{2t_1t_2}{t_1+t_2}\\ N=\frac{v_{车}}{v_{人}}=\frac{t_2+t_1}{t_2-t_1}\end{cases}$$

(其中 S 表示发车间距，T 为发车间隔时间，$v_{车}$ 为车速，$v_{人}$ 为人速，N 为车速和人速的比)

【例】某人沿公交路线匀速行走，每 9 分钟有一辆公交车从后面追上来，每 3 分钟有一辆公交车从前面迎面开来，假设公交车起点发车间隔一样，并且公交车匀速行驶，发车间隔多少分钟？(　　)

A.3 分钟　　B.4.5 分钟

C.6 分钟　　D.9 分钟

【解析】实际上是追及问题与相遇问题的合体，可以先设出人的速度和车的速度，最后可以消掉，得到一个只关于时间 t 的关系式。追及的路程或相遇时的人车路程和等于两车之间的距离。发车间隔 $T=\frac{2t_1t_2}{t_1+t_2}=\frac{2\times9\times3}{9+3}=4.5$(分钟)。选 B。

提示：公式在备考时一定要自己推导一次，才能真正理解记忆。

(2)漂流所需时间$=\frac{2t_{逆}\ t_{顺}}{t_{逆}-t_{顺}}$(其中$t_{顺}$和$t_{逆}$分别代表船顺流所需时间和逆流所需时间)。

【例】一条船从甲地到乙地要航行4小时,从乙地到甲地要航行5小时(假定船自身的速度保持不变),今有一木筏从甲地漂流到乙地所需小时数为(　　)。

A.12　　B.40　　C.32　　D.30

【解析】直接应用公式可以得出$T=\frac{2t_{逆}\ t_{顺}}{t_{逆}-t_{顺}}=\frac{2\times4\times5}{5-4}=40$(小时)。选B。

典型模型:工程问题

一、知识点记忆

工程问题在考试中也很常见,主要研究工作量与工作效率、工作时间之间的关系。核心公式是工作量=工作效率×工作时间。

工程问题相较行程问题来说,变化相对较少,多是基本工程问题或者两人、三人合作型,再复杂点的,可以设置两项工程或三项工程,解题的关键是工作效率。只要抓住工作效率这个核心,工程问题就能迎刃而解。

在考试中,多数情况下工作总量是不明确的,这时候我们可以假设一个总量,使得效率和时间也具体化,常用的是设1法和设最小公倍数法。设1法就是把总量看作1个单位,根据时间得出效率,缺点是容易出现分数的计算;设最小公倍数法因为都是整数计算,所以是我们在解题中最常用的方法,此外,列方程也很常见。

二、常考题型

1.基本工程问题

【例1】一条隧道,甲单独挖要20天完成,乙单独挖要10天完成。如果甲先挖1天,然后乙接替甲挖1天,再由甲接替乙挖1天……两人如此交替工作,挖完这条隧道共用多少天?(　　)

A.14　　B.16　　C.15　　D.13

【解析】第一步，我们设这条隧道的总工程量是 100，则甲每天的效率是 $\frac{100}{20}=5$，乙的效率是 $\frac{100}{10}=10$。

第二步，将甲乙各工作一天看作一个周期，则一个周期是两天，工作量是 $5+10=15$，$15\times6=90$，经过了 6 个周期，也就是 12 天后还剩下 10 个工作量。

第三步，将剩下的工作量按题目要求分配，甲的效率是 5，一天挖不完，所以还剩下 5 个工作量乙做，需要 2 天。所以一共需要 14 天完成。选 A。

【例 2】某项工程由 A、B、C 三个工程队负责施工，他们将工程总量等额分成了三份同时开始施工。当 A 队完成了自己任务的 90%时，B 队完成了自己任务的一半，C 队完成了 B 队已完成任务量的 80%，此时 A 队派出 2/3 的人力加入 C 队工作。问 A 队和 C 队都完成任务时，B 队完成了其自身任务的(　　)。

A.80%　　B.90%　　C.60%　　D.100%

【解析】抓住工作效率之间的关系，我们假设总量是 300，将工程总量等额划分，则每份都是 100，所以 A 完成 90，B 完成 50，C 完成 $50\times80\%=40$。

A 抽调 2/3 的人力加入 C 队工作，此时 A 的效率变为 $90\times(1-\frac{2}{3})=30$，C 的效率变为：$40+90\times\frac{2}{3}=100$。求 A 和 C 都完成任务时，B 队的工作量，我们需要求出 A 和 C 完成任务还需要的时间：

A：$\frac{(100-90)}{30}=\frac{1}{3}$，C：$\frac{100-40}{100}=\frac{3}{5}$，因为 $\frac{1}{3}<\frac{3}{5}$，所以 B 队工作 $\frac{3}{5}$，$\frac{3}{5}\times50=30$。所以 B 一共做了自身任务的 $\frac{50+30}{100}\times100\%=80\%$。所以选择 A。

2.多任务合作型

【例 1】某市有甲、乙、丙三个工程队，工作效率比为 3∶4∶5。甲队单独完成 A 工程需要 25 天，丙队单独完成 B 工程需要 9 天。现由甲队负责 B 工程，乙队负责 A 工程，而丙队先帮甲队工作若干天后

转去帮助乙队工作。如希望两个工程同时开工同时竣工,则丙队要帮助乙队工作多少天?(　　)

A. 6　　B. 7　　C. 8　　D. 9

【解析】假设甲、乙、丙三个工程队的工作效率就是3、4、5,则A工程总量$25\times3=75$,B工程总量$5\times9=45$。两项工程都完成,三队需要做$(75+45)\div(3+4+5)=10$(天)。

丙队要帮乙队做的天数是$(75-4\times10)\div5=7$(天),选B。

【例2】同时打开游泳池的A、B两个进水管,加满水需1小时30分钟,且A管比B管多进水180立方米。若单独打开A管,加满水需2小时40分钟。则B管每分钟进水多少立方米?(　　)

A. 6　　B. 7　　C. 8　　D. 9

【解析】这道题因为时间不是比例关系,是一个具体值,而且A、B进水差也是具体值,所以不适合赋值法。我们假设B每分钟进水x立方米,则根据A管比B管多进水180立方米,可以得出A每分钟进水$x+\frac{180}{90}=x+2$(立方米)。根据两次注水得出方程:$(x+x+2)\times90=(x+2)\times160$,解得$x=7$。选B。

本题注意单位的统一,将小时统一化为分钟。

【例3】某车间三个班组共同承担一批加工任务,每个班组要加工100套产品。因为加工速度有差异,一班组完成任务时二班组还差5套产品没完成,三班组还差10套产品没完成。假设三个班组加工速度都不变,那么二班组完成任务时,三班组还剩(　　)套产品未完成。

A. 5　　B. $\frac{80}{19}$　　C. $\frac{90}{19}$　　D. $\frac{100}{19}$

【解析】一班组完成100套时,二班组、三班组分别完成95套、90套,可以假设他们的效率分别为100、95、90。那么二班组完成任务还需要$5\div95=\frac{1}{19}$(天),这段时间三班组还能完成$90\times\frac{1}{19}=\frac{90}{19}$(套),还剩余$100-90-\frac{90}{19}=\frac{100}{19}$(套),选择D。

典型模型:溶液问题

一、知识点记忆

1.溶液=溶质+溶剂;

2.浓度=溶质÷溶液;

3.溶质=溶液×浓度;

4.溶液=溶质÷浓度;

5.溶液倒出比例为 a 的溶液,再加入相同的溶剂,则浓度变成原来的(1-a);

6.溶液加入比例为 a 的溶剂,再倒出相同的溶液,则浓度变成原来的$\frac{1}{1+a}$。

7.饱和溶液:指的是在一定温度下,一定剂量的溶剂里面,不能继续溶解溶质,也就意味着溶液的浓度不变,从上面的表述来看,饱和溶液,必须是在特定的温度和一定的剂量,针对的是同一物质。

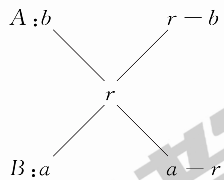
8.溶解度:在一定温度下,某固态物质在 100g 溶剂中达到饱和状态时所溶解的溶质的质量,叫做这种物质在这种溶剂中的溶解度。

这两个概念非常重要,当题目中出现"饱和溶液"或者"溶解度"等概念时,一定要判断是不是处于饱和状态,饱和状态下浓度不变。

溶液问题,解题的重点是抓溶质,方法是列方程。

十字交叉法也是常用的方法,当然,十字交叉法不限于溶液问题,只要符合 $Aa+Bb=(A+B)r$ 形式的方程,都可以写成 $\frac{A}{B}=\frac{r-b}{a-r}$ 的形式。我们常说的十字交叉法实际上是十字交叉相比法,它是一种图示方法,特别适合于两总量、两关系的混合物的计算,用来计算混合物中两种组成成分的比值。十字交叉法图示:

$Aa+Bb=(A+B)r$



注意:写在图示左边的是每个分量以及分量的平均数;写在中间的 r 是总平均数;写在右边的是总平均数与分平均数的差,注意减的顺序,如果一个是 $r-b$,则另一个是 $a-r$,如果一个是 $b-r$,则另一个要变成 $r-a$,也就是 r 的符号是相反的。通过十字交叉法可以达到秒杀题目的效果,下面通过例题来学习如何运用这种方法。

二、常考题型

1.基本计算型

【例 1】甲容器有浓度为 3%的盐水 190 克,乙容器中有浓度为 9%的盐水若干克,从乙容器中取出 210 克盐水倒入甲容器中,则甲容器中盐水的浓度是多少?(　　)

A.5.45%　　　　B.6.15%

C.7.35%　　　　D.5.95%

【解析】第一步,求出混合后的溶质。甲原有溶质 $190\times3\%=5.7$(克),从乙容器倒入溶质 $210\times9\%=18.9$(克),共有溶质 $5.7+18.9=24.6$(克)。

第二步,求出混合后的溶液。$190+210=400$(克)。

第三步,得出浓度:$\frac{溶质}{溶液}=\frac{24.6}{400}\times100\%=6.15\%$,选 B。

这道题我们观察也可以选出答案,如果倒入乙溶液 190 克,显然甲容器的浓度变为原来两种浓度的平均数 6%,而现在浓度大的乙溶液略多于 190 克,所以甲容器的浓度略大于 6%。在时间很紧张的情况下会选择这种方法来提高蒙的准确性。

【例 2】在某状态下，将 28g 某种溶质放入 99g 水中恰好配成饱和溶液，从中取出$\frac{1}{4}$溶液加入 4g 溶质和 11g 水，请问此时浓度变为多少？（　　）

A. 21.61%　　B. 22.05%

C. 23.53%　　D. 24.15%

【解析】第一步，判断饱和度。99 克水溶入 28 克溶质可以配成饱和溶液，也就是 11 克水可以溶解$\frac{28}{9}$克溶质。

第二步，加入 4g 溶质和 11 克水，因为 11 克水只能溶解$\frac{28}{9}$克溶质，所以溶液依然是饱和状态。

第三步，求饱和状态下溶液的浓度，也就是原溶液的浓度，$\frac{28}{28+99}\approx 22.05\%$，选 B。

2.十字交叉法

【例】有 100 克溶液，第一次加入 20 克水，溶液的浓度变成 50%；第二次再加入 80 克浓度为 40% 的同种溶液，则溶液的浓度变为多少？（　　）

A. 45%　　B. 47%

C. 48%　　D. 46%

【解析】设浓度为 x，则满足等式 $120\times 50\%+80\times 40\%=(120+80)x$，适用十字交叉法。

$\frac{120}{80}=\frac{x-40\%}{50\%-x}$，解得 $x=46\%$。选 D。

要注意溶液的计算，溶液=溶质+溶剂。

3.混合稀释型

【例】杯中原有浓度为 18%的盐水溶液 100ml，重复以下操作 2 次，加入 100ml 水，充分配合后，倒出 100ml 溶液，问杯中盐水溶液的浓度变成了多少？（　　）

A. 9%　　B. 7.5%

C. 4.5% D. 3.6%

【解析】第一次操作后浓度：$\frac{100\times18\%}{200}=9\%$；

第二次操作后浓度：$\frac{100\times9\%}{200}=4.5\%$，选 C。

有两个重要的结论需要记忆：

设溶液质量为 m，每次倒出溶液为m_0，再添入m_0清水补满，重复 n 次，浓度为$(\frac{m-m_0}{m})^n\cdot C_0$；

设溶液质量为 m，每次先倒入清水 m_0，再倒出溶液 m_0，重复 n 次，浓度为$(\frac{m}{m+m_0})^n\cdot C_0$。

C_0 是原来溶液的浓度。

4.抽象比例型

抽象比例型一般采用赋值法使题目具体化。

【例】一种溶液，蒸发掉一定量的水后，溶液的浓度为 10%；再蒸发掉同样多的水后，溶液的浓度变为 12%；第三次蒸发掉同样多的水后，溶液的浓度将变为多少？（　　）

A. 14% B. 17%

C. 16% D. 15%

【解析】本题关键是溶质不变，设第一次后有溶液 100，溶质 10，再蒸发掉同样多的水后，溶液为 $10\div12\%=\frac{250}{3}$，则蒸发了 $100-\frac{250}{3}=\frac{50}{3}$，第三次蒸发掉同样多的水后，溶液为$\frac{250}{3}-\frac{50}{3}=\frac{200}{3}$，则溶液的浓度为 $10\div\frac{200}{3}=15\%$。选 D。

典型模型:费用问题

一、知识点记忆

费用问题多涉及成本、售价、利润等之间的关系及其变化情况，方程法是解决费用问题的主要方法。

核心公式:①售价=成本+利润;利润=售价-成本,

②利润率=利润÷成本=(售价-成本)÷成本=售价÷成本-1,

③成本=售价÷(1+利润率)

折扣:折扣是商品购销中的让利，是卖方给买方的价格优惠。比如打九折，表示现价是原价的90%。

二、常考题型

1.普通费用型

情境特点:售价、成本、利润之间的某种等量关系。

思路提示:方程法。在费用问题中，题目通常会明确地给出几个量之间的关系，通过这些关系可以迅速得到方程。特别是在某些问题中，会出现“相等”“比……多(少)”“高出(少于)”等词，出现这些词的条件往往是列方程的依据。

【例】老王两年前投资的一套艺术品市价上涨了50%，为尽快出手，老王将该艺术品按市价的八折出售，扣除成交价5%的交易费用后，发现与买进时相比赚了7万元。问老王买进该艺术品花了多少万元?(　　)

A. 84　　B. 42　　C. 100　　D. 50

【解析】假定进价是100份，则:

进价	利润	定价	八折后	交易费	实际售价
100	50	150	120	6	114

即最终的净利润为14份,14份相当于是7万元，所以100份相当于是50万元。选D。

2.比例型费用型

情境特点:仅与比例相关的费用问题。

思路提示:赋值法。题目仅涉及两个或几个量之间的比例,给其中一个赋值,于是其他的量均可以得到合适的值,从而快速得解。

比例型费用问题涉及比例,问题抽象度增加,难度较高,所以要通过赋值法,化抽象为具体,快速解题。

【例 1】受原材料涨价影响,某产品的总成本比之前上涨了$\frac{1}{15}$,而原材料成本在总成本中的比重提高了 2.5 个百分点。问原材料的价格上涨了多少?(　　)

A. $\frac{1}{9}$　　B. $\frac{1}{10}$　　C. $\frac{1}{11}$　　D. $\frac{1}{12}$

【解析】设初始原材料的价格为 x,上涨之前的总成本为 15,原材料价格上涨了 1,则上涨之后的原材料价格为:$x+1$,上涨之后的总成本为:$15\times(1+\frac{1}{15})=16$。根据题意有:$(1+x)\div16-x\div15=2.5\%$,解得 $x=9$。故原材料的价格上涨了 $1\div9=\frac{1}{9}$,选 A。

【例 2】一商品的进价比上月低了 5%,但超市仍按上月售价销售,其利润率提高了 6 个百分点,则超市上月销售该商品的利润率为(　　)。

A. 12%　　B. 13%　　C. 14%　　D. 15%

【解析】设上月的进价为 a,其利润率为 x,则$\frac{a(1+x)-a(1-5\%)}{a(1-5\%)}=x+6\%$,解得:$x=14\%$。选 C。

3.前后变化型

情境特点:原定某种销售计划,中途出现变更,导致前后数值有变化。

思路提示:差额分析法。分别找出变化前后的情形及其差异,分析其中出现差异的原因,从而快

速得解。

前后变化型费用问题侧重考查变动过程，特别是成本、利润、售价三者在变动过程中相互影响的关系。未来的命题趋势仍是侧重对两个经济过程并存与变动这两个方面的考查。

【例1】某商店花10000元进了一批商品，按期望获得相当于进价25%的利润来定价，结果只销售了商品总量的30%。为尽快完成资金周转，商店决定打折销售，这样卖完全部商品后，亏本1000元。问商店是按定价打几折销售的？（　　）

A. 九折　　B. 七五折　　C. 六折　　D. 四八折

【解析】设商店是按定价打x折销售的，则$10000\times30\%\times(1+25\%)+10000\times(1-30\%)\times(1+25\%)\frac{x}{10}=10000-1000$，解得$x=6$，选C。

【例2】某种汉堡包每个成本4.5元，售价10.5元，当天卖不完的汉堡包即不再出售。在过去十天里，餐厅每天都会准备200个汉堡包，其中有六天正好卖完，四天各剩余25个。问这十天该餐厅卖汉堡包共赚了多少元？（　　）

A. 10850　　B. 10950　　C. 11050　　D. 11350

【解析】总成本为$4.5\times200\times10=9000$（元），总售价为$10.5\times200\times6+10.5\times175\times4=19950$（元），故总利润为$19950-9000=10950$（元）。选B。

4.统筹核算型

情境特点：对某个购买目标，有多家供应商可选，求最节省的购买方案。

思路提示：找到每一项的平均价钱最低者。在有优惠措施时，若总数能恰好被组内个数整除时，则该平均价钱最低者即为所求方案；若不能恰好被整除，则多余部分需选择单价最低者。特别需要注意，题目通常并不要求一类物品只能在一家购买。

【例】某公司要买100本便笺纸和100支胶棒。附近有两家超市，A超市的便笺纸0.8元一本，胶棒2元一支且买2送1；B超市的便笺纸1元一本且买3送1，胶棒1.5元一支。如果公司采购员要在这两家超市买这些物品，则他至少要花多少元钱？（　　）

A. 208.5　　　　B. 183.5　　　　C. 225　　　　D. 230

【解析】A超市胶棒价格等价于每支$\frac{2\times2}{3}=\frac{4}{3}$(元),B超市便笺纸价格等价于每本$\frac{1\times3}{4}=0.75$(元),因此A超市胶棒便宜,B超市便笺纸便宜。因为100是4的倍数,因此到B超市买100本便笺纸最便宜,此时费用为$100\times0.75=75$(元);100不是3的倍数,$100=3\times33+1$,因此到A超市买99支胶棒再到B超市买一支胶棒,花费最少,此时费用为:$99\times\frac{4}{3}+1.5\times1=133.5$(元)。总的费用为$75+133.5=208.5$(元)。选A。

第三堂　★★奥数经典题型

公务员考试中数学运算引用了不少奥数经典题型，每次考试都能遇到几道。熟悉奥数题型思路，显然对解题速度是有很大帮助和提高的。

一、牛吃草问题

牛吃草问题又叫牛顿牧场或消长问题。

情景特点：某量以一定速度均匀增长，同时又以另一速度被均匀消耗。

思路提示：直接套用牛吃草问题公式，得到一次方程组，快速求解即可。

牛吃草问题的通用公式为：

草场原有草量＝(所有牛每天吃草量－草场每天长草量)×天数

在实际做题中，我们一般会默认“每头牛每天吃草的量”为“1”，从而得到更简便直观的牛吃草问题公式：

草场原有草量＝(牛数－每天长草量)×天数

一般在解题的时候，并不会直接去套用公式求解原有草量，而是通过时间差来先求每天新长的草量，进而再算出原有草量。这个思路还是很简单实用的，比如：

牧场上长满牧草，草每天匀速生长，这片牧场可供 10 头牛吃 20 天，可供 15 头牛吃 10 天，问可供 25 头牛吃几天？

第一步，计算牧草每天生长量。设每头牛每天的吃草量是 1，10 头牛 20 天的吃草量：10×20＝200，15 头牛 10 天的吃草量：15×10＝150。所以每天的新生草量＝(250－150)÷(20－10)＝5。(一定是时间长的减去时间短的)

第二步，求出原有草量：200－5×20＝100。

第三步，可以设想 25 头牛中有 5 头牛专门吃新生的草，其他的牛吃原有的草。全部牧场的草可以吃的天数＝100÷(25－5)＝5(天)。

这个步骤老师在讲课的过程中多次强调，基本无须记忆公式，确实是个好方法。

怎么判断是不是牛吃草呢？典型的特征是有一个原有存量，然后有两个匀速变量(消量和增量)。牛吃草问题模型可以套用到漏船排水、窗口排队等情境中，做题时公式中所设的量和单位都要与题目的情境相对应。

【例 1】某河段中的沉积河沙可供 80 人连续开采 6 个月或 60 人连续开采 10 个月。如果要保证该河段河沙不被开采枯竭，问最多可供多少人进行连续不间断的开采？(假定该河段河沙沉积的速度相对稳定)(　　)

A. 25　　B. 30

C. 35　　D. 40

【解析】由核心公式计算，设原有河沙量为 y，每月新增河沙量为 x，可得方程：$\begin{cases}y=(80-x)\times 6\\y=(60-x)\times 10\end{cases}$；解得 $\begin{cases}x=30\\y=300\end{cases}$。即最多可供 30 人进行连续不间断的开采。选 B。

【例 2】有一个水池，池底不断有泉水涌出，且每小时涌出的水量相同。现要把水池里的水抽干，若用 5 台抽水机 40 小时可以抽完，若用 10 台抽水机 15 小时可以抽完。现在用 14 台抽水机，多少小时可以把水抽完？(　　)

A. 10 小时　　B. 9 小时

C. 8 小时　　D. 7 小时

【解析】设原有水量为 y，每小时涌出水量为 x，根据题意：“5 台抽水机 40 小时，10 台抽水机 15 小时”得，$\begin{cases}y=(5-x)\times 40\\y=(10-x)\times 15\end{cases}$，解得 $\begin{cases}y=120\\x=2\end{cases}$。现有 14 台抽水机，设所需时间为 T，则 $120=(14-2)\times T$，解得 $T=10$。选 A。

【例 3】格尔牧场长满青草，而且牧草每天都在均匀地生长着。12 头牛 4 周可以吃光 10/3 格尔的牧草；21 头牛 9 周可以吃光 10 格尔的牧草。24 格尔的牧草可以供多少头牛吃 18 周？(　　)

A.36　　B. 42

C.44　　D.48

【解析】这道题与前面两道不同，因为题目前后三次提到的牧场面积不相等，因此第一步就是把面积统一。

第一步，转化题干：

12 头牛 4 周可以吃光 10/3 格尔的牧草，转化为：432 头牛 4 周可以吃光 120 格尔的牧草；

21 头牛 9 周可以吃光 10 格尔的牧草，转化为：252 头牛 9 周可以吃光 120 格尔的牧草；

24 格尔的牧草可以供多少头牛吃 18 周？转化为：120 格尔的牧草可以供多少头牛吃 18 周？

注意：取面积的公倍数，然后牛的头数随着面积同时扩大，但是周数不要变，这是牛吃草问题的关键所在。

第二步，先算出 120 格尔牧草每周新长的草：$(252\times9-432\times4)\div(9-4)=108$。

第三步，算出 120 格尔牧草原有的草量：$(252-108)\times9=1296$。

第四步，算出可供多少头牛吃 18 周：$1296\div18+108=180$。

第五步，把 120 格尔缩小五倍至 24 格尔，牛数也同时缩小：$180\div5=36$(头)。选 A。

二、过河爬井问题

爬井问题的关键在于向上爬一段距离后会滑落一段距离。其一般情境为：一只青蛙要爬出一口深 A 米的水井，白天可以向上爬 B 米，晚上会滑落 C 米，问这只青蛙需要多久能爬出井口。解题公式为：所爬天数 $\geqslant\frac{A-C}{B-C}$，取整数。

为什么这么算？其实，每天爬几米不是关键，因为最关键的是每天能爬的最高点，只要最高点高过井口，就可以出来了。

第一天，最高点是 B 米；

第二天，因为第一天晚上下降了 C 米，所以最高点是 $(B-C)+B$；

第三天，因为第二天晚上下降了 C 米，所以最高点是 $(B-C)+(B-C)+B$；

第四天,因为第三天晚上下降了 C 米,所以最高点是 $(B-C)+(B-C)+(B-C)+B$;

依次类推,第 n 天最高点是 $(n-1)(B-C)+B$,只要这个最高点大于等于井深,就可以爬出来,所以 $(n-1)(B-C)+B\geqslant A$,化简后得 $n\geqslant\frac{A-B}{B-C}+1$,进一步通分即 $n\geqslant\frac{A-C}{B-C}$。$n$ 取整数。

过河问题原理与爬井问题一致,其一般情境为:有 A 个人需要过河,每次能过 B 个人,需要 C 个人划船,问多少次能让所有人都过河。解题公式为:过河次数 $\geqslant\frac{A-C}{B-C}$,取整数。

在考试中,不一定要求我们求多少次爬出来或多少次能过河,还有的题目要我们算出第 n 次过河时过河的总人数。这时候爬井问题的解题思路就起作用了,第 n 次过河时过河的总人数为 $(n-1)(B-C)+B$。

【例 1】有 37 名红军战士渡河,现仅有一只小船,每次只能载 5 人,需要几次才能渡完?( )

A. 7 次　　B. 8 次

C. 9 次　　D. 10 次

【解析】本题属于过河问题,每次过河都需要一名战士把船划回来,直接使用前面所讲的计算公式:过河次数 $\geqslant\frac{37-1}{5-1}=9$(次),答案为 C 选项。

那第三次过河的总人数呢?$(3-1)\times(5-1)+5=13$(人)。

另外,不要忘记,船是要人划回来的。需要 1 个人划船,这种条件在题目中往往会省略,以前总是算错,要吸取教训。

【例 2】一只青蛙掉入 18 米深的井中,它白天往上爬 5 米,晚上往下掉 2 米,问这只青蛙需要多少天才能爬出来?( )

A. 5　　B. 6

C. 7　　D. 8

【解析】本题属于爬井问题,直接使用上面所讲的计算公式:所爬天数 $\geqslant\frac{18-2}{5-2}=\frac{16}{3}$,取整数,因此

这只青蛙需要6天才能爬出来，选B。

三、比赛问题

根据比赛规则，比赛问题主要分为淘汰赛和循环赛，每类比赛都有对应的解题方法。

循环赛：N 支队伍进行循环赛，每支队伍和其他任意队伍进行一场比赛，所以每支队伍需要进行 $N-1$ 场比赛；由于每场比赛都是2个队伍共同进行，所以总场次应该为 $\frac{N\times(N-1)}{2}$；

淘汰赛：每场比赛淘汰一支队伍，每轮比赛淘汰一半的队伍（如果总数不是偶数，比如说一共13支队伍，那么淘汰6支队伍，留下7支队伍）。在淘汰赛中，若需要决出冠军，则比赛场次为 $N-1$；若需要决出前3名，则比赛场次为 N。

【例1】8个人比赛国际象棋，约定每两人之间都要比赛一局，胜者得2分，平局各得1分，负的不得分。在进行了若干局比赛之后，发现每个人的分数都不一样。问最多还有几局比赛没比？（　　）

A. 3　　B. 7

C. 10　　D. 14

【解析】首先8个人两两配对进行比赛共有 $8\times7\div2=28$（局）比赛，由规则可知，每进行一局比赛就会产生2分，所以28局比赛的总分为56分。要使未进行的比赛局数尽可能多，也就是说未出现的分数尽可能多，则出现的分数要尽可能少，那么要保证8支队伍分数各不相同，且已出现的分数尽可能少，则可构造1个等差数列，最后一名为0分，其他队伍依次加1分，8支队伍最少总分为28分。那么还未出现的分数最多有28分，每局比赛出现2分，则最多还有14局比赛未比。选D。

【例2】象棋比赛中，每个选手均与其他选手比赛一局，每局胜者得2分，负者得0分，和棋各得1分。那么以下可能是这次比赛所有选手得分的总和的是（　　）。

A. 78　　B. 67

C. 56　　D. 89

【解析】由题意可知，每局比赛产生2分，故所有选手得分和应为偶数，排除B和D项。A选项代表比赛局数应为39局，C选项代表比赛局数为28局。根据比赛规则，比赛方式为单循环赛，若有 n 个

选手，则比赛局数为 $C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}$。当 $n=8$ 时，$\frac{n(n-1)}{2}=28$，选 C。

四、空瓶换酒问题

我们一般将“M 空瓶换 N 瓶酒”转化为“$(M-N)$ 空瓶换 N(无瓶)酒”来完成答题。这样的题目默认是可以“借瓶再还瓶”的。

空瓶换酒核心公式：N 空瓶可换 1 瓶酒，则 N 瓶 $=1$ 瓶酒 $=1$ 瓶 $+1$ 酒，得 $(N-1)$ 瓶 $=1$ 酒。

【例】12 个啤酒空瓶可以免费换 1 瓶啤酒，现有 101 个啤酒空瓶，最多可以免费喝到的啤酒为(　　)。

A. 10 瓶　　B. 11 瓶

C. 8 瓶　　D. 9 瓶

【解析】本题考查空瓶换酒问题。根据题意可知，12 个空瓶换 1 瓶酒，1 瓶酒等于一个空瓶加 1 瓶的酒，所以题意等价于 11 瓶 $=1$ 酒，$101\div11=9\cdots\cdots2$，即可换 9 瓶酒。选 D。

五、鸡兔同笼问题

鸡兔同笼问题及其变形题目是公务员考试中经常出现的题型，这个问题也是我国古代著名趣题之一。其实鸡兔同笼问题也有固定的思路，简单实用。比如：

某零件加工厂按照工人完成的合格零件和不合格零件数支付工资，工人每做出一个合格零件能得到工资 10 元，每做出一个不合格的零件将被扣除 5 元。已知某人一天共做了 12 个零件，得到工资 90 元，那么他在这一天做了多少个不合格零件？(　　)

A. 2　　B. 3

C. 4　　D. 6

我们假设 12 个零件全是合格的，应该得到 $12\times10=120$(元)，现在某人只得到 90 元，少了 $120-90=30$ 元。每做一个不合格的，不但得不到 10 元，还要扣 5 元，相对于合格也就是 -15 元。所以不合格的个数为 $(-30)\div(-15)=2$(个)。

当然，列方程的思路也很方便。设他这一天做了 x 个不合格的零件，由题意得：$(12-x)\times10-$

$5x=90$，解得 $x=2$(个)。

【例 1】一辆卡车运矿石，晴天每天可运20次，雨天每天只能运12次，它一连运了112次，平均每天运14次，则这几天当中晴天有(　　)天。

A.2　　B.4

C.6　　D.8

【解析】这辆卡车一连运了112次，平均每天运14次，则可以求出这辆卡车一共运货的天数 $T=\frac{112}{14}=8$(天)。

假设8天都是雨天，则一共可以运货 $8\times12=96$(次)，比实际少运 $112-96=16$(次)。

之所以会比实际减少，是因为有晴天被当作了雨天，每有一个晴天被当作雨天，则运送次数少 $20-12=8$(次)，现在一共少了16次，所以一共有2个晴天。选A。

【例 2】已知蜘蛛有8条腿，蜻蜓有6条腿、2对翅膀，蝉有6条腿、1对翅膀。现有三种动物47只，共有腿324条，翅膀37对，则蜻蜓有多少只？(　　)

A. 9　　B.10　　C.11　　D.12

【解析】这是一道稍微复杂点的鸡兔同笼问题。因为蜻蜓和蝉都有6条腿，所以我们假设它们是同一种动物。如果所有的动物都是蜘蛛，则一共有 $8\times47=376$ 条腿，比实际多 $376-324=52$ 条腿。每有一只6条腿的动物，则比实际多算了2条腿(因为被当成了蜘蛛)，所以52条腿需要26只6条腿的动物。即蜻蜓和蝉一共26只。

现在，假设26只都是蝉，则有26对翅膀，比实际少 $37-26=11$ 对。每有一只蜻蜓，则比实际少1对翅膀(蜻蜓被看作了蝉)，所以一共有蜻蜓11只。选C。

六、钟表问题

钟表问题大概有3种，一种是标准时间问题，一种是时钟追及相遇问题，还有一种是周期问题。其中追及相遇问题可以看作是行程问题中的环形追及相遇问题，只不过两个人换成了时针和分针。而且我们会遇到各种“怪钟”，或者是“坏了的钟”，它们的时针和分针每分钟走的度数会与常规的时钟

不同，总之，时钟问题不难，但是很细，需要仔细作答。

钟面基本知识包括：

①时针一昼夜转 2 圈，分针一昼夜转 24 圈，分针与时针的转速之比为 12∶1。

②时针与分针一昼夜重合 22 次，垂直 44 次，呈 180°也是 22 次。

③时针与分针呈某个角度往往需要考虑到对称的两种情况。

④无论是标准表还是坏表，都是匀速转动的，只是速度不同而已。

⑤钟面上一分钟的间隔视作一个小格，五分钟的间隔视作一个大格。

⑥整个钟面为 360 度，上面有 12 个大格，每个大格为 30 度；60 个小格，每个小格为 6 度。

分针速度：每分钟走 1 小格，每分钟走 6 度

时针速度：每分钟走 1/12 小格，每分钟走 0.5 度

钟表问题追及公式：$T=T_0+\frac{1}{11}T_0$。其中：T 为追及时间，即分针和时针"达到条件要求"的真实时间；T_0 为静态时间，即假设时针不动，分针和时针"达到条件要求"的虚拟时间。

假设时针、分针的转动角速度分别为 v、$12v$，分针需要追及的角度为 S，需要追及的时间为 T。为方便比较，我们再假设如果时针静止时，分针需要追及的时间为 T_0（静态时间），那么：

$\begin{cases} S=(12v-v)T \\ S=(12v-0)T_0 \end{cases}$ 所以可以推出 $\mathrm{T}=\frac{12}{11}\mathrm{T}_0$，即 $\mathrm{T}=\mathrm{T}_0+\frac{1}{11}\mathrm{T}_0$。

【例 1】小张的手表每天快 30 分钟，小李的手表每天慢 20 分钟，某天中午 12 点，两人同时把表调到标准时间，则两人的手表再次同时显示标准时间最少需要的天数为（　　）。

A.24　　B.36　　C. 72　　D.144

【解析】由题意可知，再次显示标准时间 12 时，小张的手表实际比标准时间多走 12 小时，小李的手表实际上比标准时间少走 12 小时，因此小张的手表需要 $12\div0.5=24$（天），小李的手表需要 $12\div\frac{1}{3}=36$（天），取 24 和 36 的最小公倍数为 72 天。因此 72 天以后两人的手表都显示标准时间。

【例 2】张某下午六时多外出买菜，出门时看手表，发现表的时针和分针的夹角为 110°，七时前回家时又看手表，发现时针和分针的夹角仍是 110°，那么张某外出买菜用了多少分钟？（　　）

A. 20 分钟　　B. 30 分钟

C. 40 分钟　　D. 50 分钟

【解析】因为是六点多出去，六点多回来，显然是前面分针与时针角度差 110°，后面时针与分针差 110°，即分针反超 110°，也就是相对于时针运行了 220°。分针每分钟运转 6°，时针每分钟 0.5°，速度差是 5.5°。所以外出用的时间 T＝220÷5.5＝40（分钟）。

如果利用追及公式呢？经过简单分析，这段时间分针应该追上时针 2 个 110°，即 220°，那么静态时间应该是：$T_0=220°\times\frac{60}{360°}=\frac{110}{3}$（分钟）。真实时间：$T=T_0+\frac{T_0}{11}=40$（分钟）。

七、年龄问题

①每过 N 年，每个人都长 N 岁。

②两个人的年龄差在任何时候都是固定不变的。

③两个人的年龄倍数关系随着时间推移而变小。

年龄问题的关键是年龄差。一般列方程比较快。

【例 1】小李的弟弟比小李小 2 岁，小王的哥哥比小王大 2 岁、比小李大 5 岁。1994 年，小李的弟弟和小王的年龄之和为 15。问 2014 年小李与小王的年龄分别为多少岁？（　　）

A.25，32　　B.27，30

C.30，27　　D.32，25

【解析】简单到不能再简单的题了，2015 年国考地市级题目。小李比小王小 3 岁。抓住这个年龄差，发现只有 B 项合适。

【例 2】一家四口人的年龄之和为 149 岁，其中外公年龄、母亲年龄以及两人的年龄之和都是平方数，而父亲 7 年前的年龄正好是孩子年龄的 6 倍。问外公年龄上一次是孩子年龄的整数倍是在几年前？（　　）

A. 2　　B. 4

C. 6　　D. 8

【解析】本题中的暗含条件：外公和母亲的年龄是直角三角形的两直角边的平方，从最常用的6、8、10可断定母亲和外公的年龄分别为36和64岁。则父亲与儿子的年龄和为149－100＝49，7年前父亲与儿子的年龄和为49－14＝35（岁），儿子七年前年龄为35÷7＝5（岁），今年儿子12岁，代入选项：

2年前：外公62岁，儿子10岁，不能整除；

4年前：外公60岁，儿子8岁，不能整除；

6年前：外公58岁，儿子6岁，不能整除；

8年前：外公56岁，儿子4岁，可以整除。

选D。

八、日期推断问题

平年：不能被4整除，全年365天，2月28天。

闰年：可以被4整除，全年366天，2月29天。

月：每年有12个月，一、三、五、七、八、十、十二月，每月31天；二月在闰年是29天，平年28天，其他月份每月30天。

周：每周7天，每隔N天，相当于$(N+1)$天，这点很重要，在题目中经常遇到每隔N天的情况。

天：平年有365天，365÷7＝52…1，那么提问“365天之后（即1年之后）星期几”就等同于提问“1天之后星期几”，提问“N年之后星期几”就等同于提问“N天之后星期几”，闰年跟平年比仅仅多了一个“2月29日”，那么在进行实际计算的时候，我们先假设“一年就是一天”，再计算两个日期之间包含了多少个“2月29日”，再把这些天补上即可。这个结论也很重要，在推算N年后星期几时可以省掉大量计算，提高做题速度。

【例1】从A市到B市的航班每周一、二、三、五各发一班。某年2月最后一天是星期三。问当年从A市到B市的最后一次航班是星期几出发的？（　　）

A.星期一　　B.星期二

C.星期三　　D.星期五

【解析】2月最后一天是星期三，从2月最后一天到12月31日恰好经过3—12月共10个月，一共有31＋30＋31＋30＋31＋31＋30＋31＋30＋31＝306(天)，306÷7＝43……5，也就是经过43个星期还多5天，星期三之后5天为星期一，选A。

【例2】根据国务院办公厅部分节假日安排的通知，某年8月份有22个工作日，那么当年的8月1日可能是(　　)。

A. 周一或周三　　B. 周三或周日

C. 周一或周四　　D. 周四或周日

【解析】观察选项，代入验证。由于8月有31天，若8月1日为周一，则容易看出8月份一共会有23个工作日，不满足条件，故排除A、C两项；若8月1日为周三，计算可以发现8月份会有23个工作日，不满足条件，故排除B项。因此本题选择D。

【例3】A、B、C、D四人去羽毛球馆打球，A每隔5天去一次，B每隔11天去一次，C每隔17天去一次，D每隔29天去一次，5月18日，四个人恰好在羽毛球馆相遇，则下一次相遇时间为？(　　)

A. 9月18日　　B. 10月14日

C. 11月14日　　D. 12月18日

【解析】注意“每隔N天”，A、B、C、D分别每6、12、18、30天去一次羽毛球馆，这四个数的最小公倍数为180，现在为5月18日，题目转化为180天后的日期，5月份此时还剩13天，6、7、8、9、10月分别有30、31、31、30、31天，180－(13＋30＋31＋31＋30＋31)＝14，即最终日期为11月14日，选C。

第四堂　★★★初等几何问题

一、知识点记忆

1.长度

①周长：$C_{正方形}=4a$；$C_{长方形}=2(a+b)$；$C_{圆}=2\pi r$

②正弦定理：$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2r$（$r$ 为三角形外接圆半径，a、b、c 为角 A、B、C 的对应边）

或变形为 $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$

③余弦定理：$\begin{cases}a^2=b^2+c^2-2bc\cos A\\b^2=a^2+c^2-2ac\cos B\\c^2=b^2+a^2-2ba\cos C\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\\\cos C=\frac{b^2+a^2-c^2}{2ab}\end{cases}$

2.面积

$S_{正方形}=a^2$　$S_{长方形}=ab$　$S_{圆}=\pi r^2$

$S_{三角形}=\frac{1}{2}ah$　$S_{平行四边形}=ah$

$S_{梯形}=\frac{1}{2}(a+b)h$　$S_{扇形}=\frac{n}{360^\circ}\pi r^2$（$n$ 是扇形圆心角的度数）

正方体的表面积$=6a^2$　长方体的表面积$=2ab+2bc+2ac$

球的表面积$=4\pi R^2=\pi D^2$　圆柱体的表面积$=2\pi r^2+2\pi rh$

3.体积

正方体的体积$=a^3$　长方体的体积$=a\cdot b\cdot c$　球的体积$=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{1}{6}\pi D^3$

圆柱体的体积$=\pi r^2 h$　圆锥体的体积$=\frac{1}{3}\pi r^2 h$

4.性质

周长相同的平面几何图形，越接近于圆，面积越大；

面积相同的平面几何图形，越接近于圆，周长越小；

表面积相同的立体几何图形，越接近于球，体积越大；

体积相同的立体几何图形，越接近于球，表面积越小；

在三角形中，两边之和大于第三边，两边之差小于第三边；

在任何一个直角三角形中，两条直角边的平方和一定等于斜边的平方；

5.边端计数

(1)植树

单边线型植树公式：棵数＝总长÷间隔＋1；总长＝(棵数－1)×间隔。

单边环型植树公式：棵数＝总长÷间隔；总长＝棵数×间隔。

单边楼间植树公式：棵数＝总长÷间隔－1；总长＝(棵数＋1)×间隔。

双边植树问题公式：相应单边植树问题所需棵树的 2 倍。

(2)剪绳

一根绳子连续对折 N 次，从中剪 M 刀，则绳子被剪成$(2^N\times M+1)$段。

剪绳问题是公考中的基本问题，它可以拓展为爬楼计数与截管求时等模型。

爬楼计数：从地面开始爬楼，爬到第 N 层，则实际爬过$(N-1)$层；若从第 N 层爬到第 M 层，则实际爬过$(M-N)$层。

截管求时：将一根钢管截成 N 段，需要截$(N-1)$次。

(3)方阵

N 排 N 列的方阵人数为 N^2 人，最外层人数为 $4(N-1)$，最外两层的人数和为 $8(N-2)$。

方阵人数＝(最外层人数÷4＋1)^2

方阵相邻两圈的人数都满足:外圈比内圈多8人。

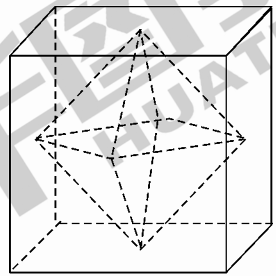
理解计数问题最好的方式是通过图示来理解上述结论,试题一般比较简单。

二、常考题型

1.规则图形

规则图形熟记公式最重要。

【例】连接正方体每个面的中心构成一个正八面体(如下图所示)。已知正方体的边长为6厘米,问正八面体的体积为多少立方厘米?( )



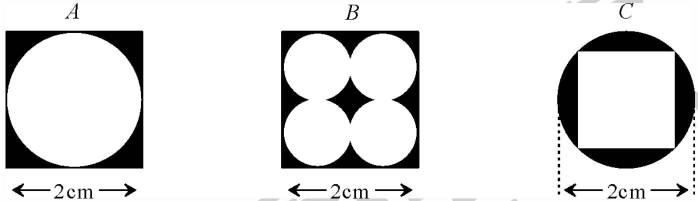
A. $18\sqrt{2}$　　B. $24\sqrt{2}$　　C. 36　　D. 72

【解析】该正八面体可以看做是由两个四棱锥组成的,每个四棱锥的底面为原正方体四个侧面的中心连线,面积为原正方体底面面积的一半,高分别为上下两个正方体底面中心到四棱锥底面的距离,解得:$V=\frac{1}{3}sh=\frac{1}{3}\times6^2\times\frac{1}{2}\times3\times2=36$(立方厘米)。

2.不规则图形

不规则图形需要切割,使之成为规则图形后再计算。

【例】下列图形均是由正方形与圆形所构成的，图形中阴影部分的面积最大的是（　　）。



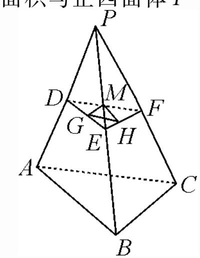
A. A 最大　　B. B 最大

C. C 最大　　D. 都一样大

【解析】三个图形阴影部分的面积均不规则，均等于整体面积减去空白面积。经计算可得 A 图中的阴影面积 $=2^2-\pi\approx4-3.14=0.86(cm^2)$；B 图中的阴影面积 $=2^2-\pi\times(\frac{1}{2})^2\times4\approx4-3.14=0.86(cm^2)$；C 图中的阴影面积 $=\pi-(\sqrt{2})^2\approx3.14-2=1.14(cm^2)$。因此 C 图的阴影面积最大。答案为 C。

3.几何性质

【例】如图，正四面体 $P-ABC$ 的棱长为 a，D、E、F 分别为 PA、PB、PC 的中点，G、H、M 分别为 DE、EF、FD 的中点，则三角形 GHM 的面积与正四面体 $P-ABC$ 的表面积之比为（　　）。



A. 1∶8　　B. 1∶16

C. 1∶32　　D. 1∶64

【解析】根据题意可知：$DE=EF=FD=\frac{1}{2}$棱长，$DG=GE=EH=HF=FM=MD=GM=MH=HG=\frac{1}{2}DE$，则 $S_{\triangle GHM}=\frac{1}{4}S_{\triangle DEF}$、$S_{\triangle DEF}=\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{4}\times$四面体 $P-ABC$ 表面积，故三角形 GHM 是四面体 $P-ABC$ 表面积的$\frac{1}{64}$。选择 D 选项。

几何问题在公务员考试中考得不是很多，频率比较小，所以复习的重点一般也不会放在这上面。

第五堂　★★★排列组合

排列组合:直线排列

排列组合与生活密切相关,题目情境变化多端,不易掌握,且与概率问题有较大的联系。但考试中常见的题型还是可以穷尽的。

一、知识点记忆

1.排列。从 n 个不同元素中任取 m 个(m≤n)元素按一定的顺序排成一列,叫做从 n 个元素中取出 m 个元素的一个排列;所有排列的个数,叫做从 n 个元素中取出 m 个元素排列的个数,用 P(n,m)表示。注意:排列是有顺序的。(a,b)与(b,a)是不同的排列。

公式:$P(n,m)=A_n^m=n\times(n-1)\times(n-2)\times(n-3)\times\cdots\times(n-m+1)$

2.组合。从 n 个不同元素中任取 m 个($m\leqslant n$)元素形成一组,叫做从 n 个元素中取出 m 个元素的一个组合;所有组合的个数,叫做从 n 个元素中取出 m 个元素组合的个数,用 $C(n,m)$表示。注意:组合是有顺序的。(a,b)与(b,a)是相同的组合。

公式:$C(n,m)=\dfrac{A_n^m}{m!}=\dfrac{n\times(n-1)\times(n-2)\times(n-3)\times\cdots\times(n-m+1)}{m\times(m-1)\times(m-2)\times\cdots\times1}$

3. 平均分组问题不要忘了除以组的排列。比如 4 个人,分成 2 个人一组,相当于平均分成两组,一共有 $\dfrac{C_4^2}{A_2^2}=3$ 种不同分法,而不是 $C_4^2=6$ 种。

【详解】假设 4 个人是甲、乙、丙、丁,要求分成 2 人一组。

第一组:(甲,乙)(丙,丁)	第二组:(甲,丙)(乙,丁)
第三组:(甲,丁)(乙,丙)	第四组:(乙,丙)(甲,丁)

第五组:(乙,丁)(甲,丙)	第六组:(丙,丁)(甲,乙)

从上表我们可以看出,第一组与第六组,第二组与第五组,第三组与第四组是相同的组合,只是排列不同。对于平均分组问题,平均分成 n 组,就需要除以组的排列数 A_n^n。

4.乘法原理与加法原理。

(1)完成 1 件事,需要划分几个步骤,每个步骤只能完成这件事的一部分,所有步骤做完才能完成这件事,这时使用乘法原理,将完成这件事所有步骤的方法数相乘。

(2)完成 1 件事,有几个方法,每种方法都能独立完成该事件,这时候使用加法原理,将完成这件事的方法数相加。

5. $C_n^0=C_n^n=1$(规定 $0!=1$)

$C_n^m=C_n^{n-m}$。比如 $C_4^1=C_4^3=4$

$C_n^0+C_n^1+C_n^2+C_n^3+\cdots+C_n^{n-1}+C_n^n=2^n$

二、常考题型

1.基本原理型

解题核心主要有两点:一是判断是否与顺序有关,是排列还是组合;二是判断是分步还是分类,分步用乘法原理,分类用加法原理。

【例 1】一次会议某单位邀请了 10 名专家,该单位预订了 10 个房间,其中一层 5 间、二层 5 间。已知邀请专家中 4 人要求住二层、3 人要求住一层、其余 3 人住任一层均可。那么满足他们的住房要求且每人 1 间,有多少种不同的安排方案?(　　)

A. 43200　　B. 7200

C. 450　　D. 75

【解析】这道题直接考查基本原理。有两拨专家对层数有特殊要求,特殊要求优先处理。

第一步,安排要求住在二层的专家,从二层 5 个房间中选出 4 个,显然是有顺序的:$P(5,4)=5\times4\times3\times2=120$

第二步，安排要求住在一层的专家，同上：$P(5,3)=5\times4\times3=60$

第三步，安排无要求的专家，共 3 个专家 3 个房间：$P(3,3)=3\times2\times1=6$

至此，题目要求安排完毕，且每一步都不能独立达成题目要求，分步用乘法原理：$120\times60\times6=432000$，所以答案选择 A。（在考试中，算到第二步，发现数量级已经达到 $120\times60=7200$，故直接排除 B、C、D）

【例 2】甲乙两个科室各有 4 名职员，且都是男女各半。现从两个科室选出 4 人参加培训，要求女职员比重不得低于一半，且每个科室至少选 1 人。问有多少种不同的选法？（　　）

A. 67　　B.63　　C.53　　D.51

【解析】这道题比例 1 复杂的地方在于需要分类讨论。女职员比重不低于一半，也就是女职员至少 2 人。

第一类：男女各 2 人。甲、乙科室共有男职员 4 人、女职员 4 人，从中选男女各 2 人，用乘法原理，有 $C_4^2\times C_4^2=36$ 种，注意题目要求“每个科室至少选 1 人”，2 男 2 女可能都来自甲科室或者乙科室，需要减去这两种情况。符合题意的有 $36-2=34$ 种。

第二类：男 1 女 3。每个科室只有 2 名女职员，选 3 名意味着两个科室必然都至少入选 1 人，乘法原理，有 $C_4^3\times C_4^1=16$ 种。

第三类：男 0 女 4，只有 1 种。

分类用加法，所以一共有 $34+16+1=51$ 种方案。选 D。

【例 3】一个班有学生 10 名，其中女生 3 名，现在选举 2 名代表，至少有 1 名女生当选的不同选法有（　）种。

A. 21　　B. 27　　C. 32　　D. 24

【解析】从正面去思考，这道题和例 2 一样，需要分类考虑。至少有 1 名女生当选，包括 1 男 1 女、0 男 2 女两种情况，分别算出来方法数相加即可。

遇到这种题目，我们还可以逆向来思考，至少有 1 名女生当选，反过来就是所有女生都未当选，利用“满足条件的个数＝总个数－不满足条件的个数”来得出答案。（这种思路一定要注意穷尽不满足

条件的情况，若不能穷尽，则会得出比实际偏大的数值）

总个数即 10 个人中任意选 2 名代表，有 $C_{10}^{2}=45$ 种方法。

不满足条件的个数，即 0 名女生当选，相当于从男生中选 2 名代表，有 $C_{7}^{2}=21$ 种方法。

所以，至少有 1 名女生当选的不同选法有 $45-21=24$ 种，选 D。

2.捆绑插空型

这两种问题都是分步计算问题，适用乘法原理，核心思维是特殊情况最后考虑。

(1)相邻问题用捆绑。当题目表述为某两个或几个物体要求相邻时，考虑捆绑法。所谓捆绑法，就是将相邻的几个物体视作 1 个物体，再与其他的物体进行排列，这是第一步（待排列的物体总数为“剩下的物体个数”+“捆绑的整体数”）；第二步再考虑相邻的几个物体之间的排列顺序；第三步用乘法原理将两个结果相乘。

(2)不相邻问题用插空。当题目表述为某两个或几个物体不相邻时，考虑插空法。将其他几个物体先进行排列（待排列的个数为剩下的物体个数）；然后将不相邻的物体插到已排列好的物体之间的空隙中去（空隙数=排列物体个数+1）；第三步用乘法原理将两个结果相乘。运用插空法解决排列组合问题时，一定要注意插空位置包括先排好元素“中间空位”和“两端空位”。解题过程是“先排列，再插空”。

此外要注意，某些题目条件还会有具体变化，比如不允许排在首位等，这时候可以考虑画图法来断定具体的排列数或空隙数；有的题目可能要捆绑法和插空法并用。

【例 1】有 8 本不同的书，其中数学书 3 本，外语书 2 本，其他学科书 3 本。若将这些书排成一列放在书架上，让数学书排在一起、外语书也恰好排在一起的排法共有（　　）种。

A. 240　　B. 720　　C. 1440　　D. 2880

【解析】涉及相邻问题，考虑捆绑法。

第一步，将数学书视作一个整体、外语书视作一个整体，与剩下的 3 本书进行排列，此时相当于 5 本书进行全排列，共有 $A_{5}^{5}=120$ 种方法。

第二步，数学书内部进行排列，共有 $A_{3}^{3}=6$ 种方法；外语书内部进行排列，共有 $A_{2}^{2}=2$ 种方法。

第三步，分步用乘法，共有 $120\times6\times2=1440$ 种不同方法。

【例 2】7 人站成一排照相，若要求甲、乙、丙不相邻，则有多少种不同的排法？(　　)

A. 120　　B. 240

C. 1440　　D. 2880

【解析】题目涉及不相邻，考虑插空法。

第一步，将除甲、乙、丙之外的 4 人进行全排列，共有 $A_4^4=24$ 种方法；

第二步，将甲、乙、丙分别插入排列好的 4 人形成的 5 个空隙中，并且甲、乙、丙有顺序区别，共有 $A_5^3=60$ 种方法；

第三步，分步用乘法，总共有 $24\times60=1440$ 种不同的方法。选 C。

【例 3】在一张节目单中原有 6 个节目，若保持这些节目相对顺序不变，再添加进去 3 个节目，则所有不同的添加方法共有多少种？(　　)

A. 42　　B. 56

C. 360　　D. 504

【解析】这是插空法的一个变形。节目单的 6 个节目一共形成 7 个空隙。要注意与例 1 和例 2 的区别，例 3 中的 3 个节目，并没有要求相邻或不相邻，所以要分别考虑。假设要插进去的三个节目分别为 A、B、C。

第一步，将 A 节目插入 7 个空隙中，共有 $A_7^1=7$ 种方法；

第二步，考虑 B 节目，此时 A 节目已经插入进去，7 个节目共形成 8 个空，B 节目任选 1 个插进去，共有 $A_8^1=8$ 种方法；同理，C 节目共有 9 个空可选，共有 $A_9^1=9$ 种不同方法；

第三步，分步用乘法，共有 $7\times8\times9=504$ 种不同方法。选 D。

3.分配插板型

我们经常会遇到一类题目，要求将给定的无差别的元素分成数量不等的若干组，并且每组至少一个元素。这时候我们就要用插板法。

将 n 个相同元素分成 m 组，每组至少一个元素，共有 C_{n-1}^{m-1} 种方法。

插板法适用条件：

(1)待分配的元素必须无差别，也就是说插板法适用于“相同元素”的分组问题，一定要注意这点。

(2)每组至少一个元素，也就是要求每组都“非空”。(对于每组可以是“零”的分组，在应用插板法时要仔细分析插板的位置，不能直接套用插板公式)

(3)待分配的元素必须全部分完，不允许有剩余。

【例 1】将 7 个大小相同的桔子分给 4 个小朋友，要求每个小朋友至少得到 1 个桔子，一共有几种分配方法？(　　)

A. 14　　　　B. 18

C. 20　　　　D. 22

【解析】我们将 7 个完全相同的桔子画出来：

｜ ⊙ ｜ ⊙ ｜ ⊙ ｜ ⊙ ｜ ⊙ ｜ ⊙ ｜ ⊙ ｜

第一步，7 个桔子一共形成 8 个可供插板的位置，用“｜”表示。但是题目要求每个小朋友至少分得 1 个桔子，所以两端的“｜”不符合要求，符合要求的插板位置有 $7-1=6$ 个(每组“非空”，也就是排除两端的空隙)；

第二步，要求分给 4 个小朋友，只需要 $4-1=3$ 块板就可以将桔子分成 4 份，相当于从 6 个空隙中任选 3 个；

所以，分配方法是 $C_{7-1}^{4-1}=C_6^3=20$ 种。选 C。

【例 2】有 8 个相同的球放到三个不同的盒子里，共有(　　)种不同方法。

A. 35　　　　B. 28

C. 21　　　　D. 45

【解析】题目并没有明确“每个盒子至少放 1 个球”，所以不能直接套用插板法公式。

(思路 1)每个盒子可以为 0，也就是两端的空隙也可以插板，8 个小球共有 9 个空可以插板，其中 1 个空位可以插多个板。分成三份需要插两个板。我们先插第一个板，有 9 个位置可选，共 9 种方法；这时候第二块板共有 10 个空隙可以选，但由于两个板是不可分的(也就是说当两个挡板相邻时，虽然是

两种插法,但实际上是一种分法),所以共$\frac{9\times10}{2}=45$种。选D。

(思路2)构造插板法条件。假设每个盒子里原有1个球,我们向每个盒子"借"1个球。这时候盒子空了,我们共有11个球。因为向每个盒子"借"了1个球,所以每个盒子至少要分得1个球。直接应用插板公式,$C_{11-1}^{3-1}=45$种。选D。(这种构造思路很重要,在解题中经常用到,例3也是一种重要的构造思路,需要重点掌握)

【例3】某领导要把20项任务分给3个下属,每个下属至少分得3项任务,则共有(　　)种不同的分配方式。

A. 28　　B. 36

C. 54　　D. 78

【解析】要求每个下属至少分得"3项任务",需要转化成插板法条件。

第一步,我们先给每个下属分2项任务,此时分了6项任务,还剩下14项;

第二步,每人至少再分1项任务,就满足至少分得"3项任务",符合插板法条件。直接应用公式共有$C_{14-1}^{3-1}=78$种分配方式。选D。

4.转化换算型

【例1】A、B、C、D、E、F六个人排成一排,请问A要站在B的前面(不要求挨着)并且B要站在C的前面(不要求挨着)的站法有多少种?(　　)

A. 120　　B. 240

C. 360　　D. 720

【解析】(思路1)转化为概率。

第一步,将6个人全排列,共有6!=720种方法;

第二步,A、B、C三人,进行全排列,有3!=6种方法,但满足"A在B的前面、B在C的前面"的只有A,B,C唯一的一种,概率为$\frac{1}{6}$;

所以，符合条件的站法有 $720\times\frac{1}{6}=120$ 种。选 A。

(思路 2)直接计算。

第一步，优先排 A、B、C，只有 1 种方法；

第二步，因为 A、B、C 可以相邻，也可以不相邻，所以 D 有 4 个空位可选；当 D 选好后，E 有 5 个空位可选；E 选好后，F 有 6 个空位可选；

所以，符合条件的站法有 $1\times4\times5\times6=120$ 种。选 A。

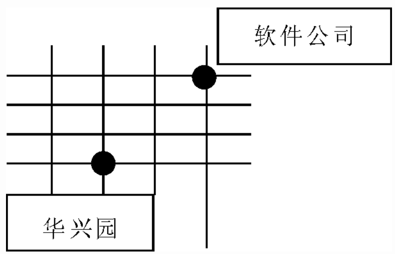
【例 2】在一排 10 个花盆中种植 3 种不同的花，要求每 3 个相邻的花盆中花的种类各不相同，问有多少种不同的种植方法？(　　)

A. 6　　　　B. 12　　　　C. 18　　　　D. 24

【解析】其实只要前两盆的花确定了，后面 8 盆的花也就固定了。题目可以转化为"前两个花盆有多少种不同的种植方法"。

从 3 种花中任取 2 种，进行排列，共有 $A_3^2=6$ 种方法。选 A。(这道题是同义转化)

【例 3】小张从华兴园到软件公司上班要经过多条街道(软件公司在华兴园的东北方)。假如他只能向东或者向北行走，则他上班不同走法共有(　　)。



A. 12 种　　　　B. 15 种　　　　C. 20 种　　　　D. 10 种

【解析】需要将几何图形转化为数字信息。

从图中可以发现，无论怎么走，小张都有 5 步，并且都是 2 步向东、3 步向北。我们只需要从 5 步中任选 3 步向北的即可(选 2 步向东也可以)，共有 $C_5^3=10$ 种。选 D。

5.错位排序

全错位排列即被著名数学家欧拉称为组合数论的一个妙题的“装错信封问题”。

大意如下：一个人写了 n 封不同的信及相应的 n 个不同的信封，他把这 n 封信都装错了信封，问都装错信封的装法有多少种？

显然，当 $n=1$ 时，不存在装错的情况，装错信封的方法 $D_1=0$；

当 $n=2$ 时，只有 1 种装错的情况，装错信封的方法 $D_2=1$；

当 $n=3$ 时，有 2 种全部装错的情况，$D_3=2$；

……

n 个信封全都装错了的方法 $D_n=n!\left[1+\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{(-1)^n}{n!}\right]$

这个公式比较复杂，在考试中，我们牢记前六位错位排序方法就可以：$D_1=0$，$D_2=1$，$D_3=2$，$D_4=9$，$D_5=44$，$D_6=265$。

【例 1】4 位厨师聚餐时各做了一道拿手菜，现在要求每人各品尝一道菜，但不能尝自己做的那道菜，问共几种不同的尝法？(　　)

A. 6　　B. 9　　C. 12　　D. 15

【解析】每个人都不能尝自己做的那道菜，即错位排序。$D_4=9$。选 B。

【例 2】幼儿园某小班有 7 名小朋友，上课铃响慌乱中迅速回到座位，结果只有 3 名小朋友坐到了自己的位置上，请问这样的情况一共有多少种？(　　)

A. 315　　B. 350　　C. 385　　D. 420

【解析】第一步，任选 3 名小朋友回到座位上，共有 $C_7^3=35$ 种方法；

第二步，剩下的 4 名小朋友错位排序，共有 $D_4=9$ 种方法；

分步用乘法,共有 $35\times9=315$ 种方法。选 A。

排列组合:环状排列

一、知识点记忆

环状排列,又称圆排列,是将事物沿着一圆周来排列,只考虑事物的相对位置,而不计较各事物的实际位置。要注意:环状排列可以旋转,但是不可以翻转。

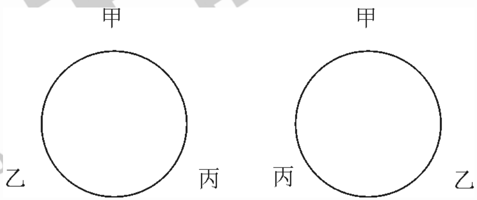
甲、乙、丙三人围成一桌而坐,共有几种方法?

第一步,我们先考虑直线排列的情况(共 6 种情况):

第一组:甲—乙—丙　　乙—丙—甲　　丙—甲—乙

第二组:甲—丙—乙　　丙—乙—甲　　乙—甲—丙

第二步,我们将第一组与第二组分别连成圆圈,发现第一组三种情况处于同一个圆圈中,第二组三种情况也处于同一个圆圈中,只不过是旋转了位置而已。



所以若 n 个不同事物在做环状排列时,先求其直线排列,因每 n 个排列方式,在环状排列均视为同一种,故环状排列数为$\dfrac{\text{直线排列数}}{\text{排列个数}}$。

n 个不同的事物进行环状排列:$\dfrac{n!}{n}=(n-1)!$(环状排列首尾相连,与直线排列相比缺少一个参照物,所以环状排列相当于拿出一个事物作为参照物,将其余的事物进行全排列)

n 个不同的事物中任取 m 个事物进行环状排列：$\frac{A_n^m}{m}$。

前面提到环状排列不可以翻转，但如果是正反无区别的事物进行排列，比如项链，翻转后与翻转前是重复的，所以项链排列方法为 $\frac{\text{环状排列数}}{2}$。

二、常考题型

四对情侣围圆桌而坐，下列情况，各有几种方法？

(1)男女相隔且情侣相邻；

解析：

涉及相邻，考虑捆绑法。

第一步，将每对情侣捆绑，然后环形排列，共有 $\frac{A_4^4}{4}=A_3^3=6$ 种方法；

第二步，每对情侣男女有两种排列方式，但要求男女相隔，第一对情侣位置固定，其他情侣也就固定了。所以共有 2 种排列方法；

分步用乘法原理，共有 $6\times2=12$ 种方法。

(2)每对情侣相对；

解析：

相对，意味着情侣中的一位位置确定，另一位也就确定了位置，考虑捆绑法。

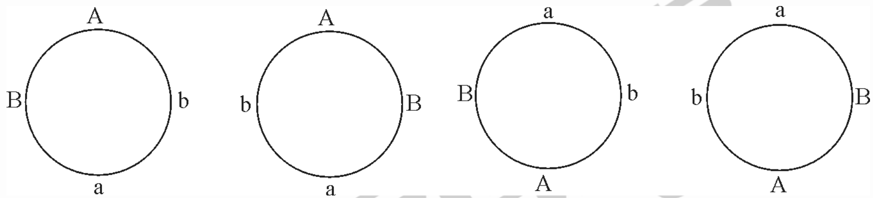
第一步，将每对情侣捆绑，然后环形排列，共有 $\frac{A_4^4}{4}=A_3^3=6$ 种方法；

第二步，拿出一对情侣作为参照，其他三对情侣，每对情侣男女都可以交换位置，共有 $2\times2\times2=8$ 种方法；

分步用乘法原理，共有 $6\times8=48$ 种方法。

注意：为什么第二步中第一对作为参照的情侣不能交换位置？我们通过图形来理解：

假设共两对情侣：A、a、B、b，若作为参照物的 A、a 也交换位置：



环状排列可以旋转不能翻转，我们都从 A 开始按顺时针方向表示上面四种排列方式图：

A—b—a—B，　A—B—a—b，　A—B—a—b，　A—b—a—B，

我们发现，若 Aa 在相对位置中也交换位置，得到了重复的排列。所以，在相对位置中，作为参照物的不可以交换位置。这种简易图的思路大家也要掌握。

(3)恰有三对相邻；

解析：

相邻问题考虑捆绑法，不相邻问题考虑插空法。

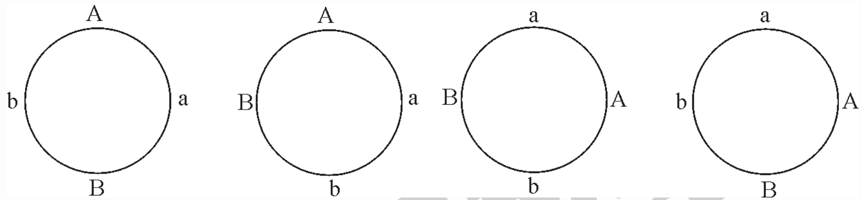
第一步，首先考虑相邻。从 4 对情侣中任选 3 对情侣，共有 $C_4^3=4$ 种方法。3 对相邻的情侣环状排列，共有 $\frac{A_3^3}{3}=A_2^2=2$ 种方法。至此，根据分步用乘法原理，共有 $4\times2=8$ 种方法；

第二步，剩下的一对情侣必不相邻，考虑插板法结合第二题的图我们可以看出，4 对情侣在环状排列中共有 4 个空隙，同理，3 对情侣共有 3 个空隙可选，任意选 2 个供剩下的情侣分别就座，且男女有位置差别，共有 $A_3^2=6$ 种方法；

第三步，相邻的 3 对情侣中男女都可以互换位置，共有 $2\times2\times2=8$ 种方法；

所以，共有 $8\times6\times8=384$ 种方法。

注意：为什么在相邻问题中作为参照的情侣又可以交换位置了呢？这和相对位置的区别主要是由各个情侣之间的位置引起的。同样的，我们假设共两对情侣：A、a、B、b，情侣相邻而坐，如图：



我们都从 A 开始按顺时针方向表示上面四种排列方式图：

A—a—B—b，　　A—a—b—B，　　A—b—B—a，　　A—B—b—a，

我们发现，A、a 交换位置得到的是不同的排列方式（翻转）。这一点大家注意理解。

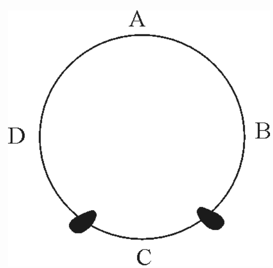
（4）情侣不相邻且男女间隔；

解析：

相比前面三道题，第四题要简单许多。不相邻用插空法。

第一步，先排 4 个男生，环状排列共有 $\frac{A_4^4}{4}=A_3^3=6$ 种方法；

第二步，要求情侣不相邻且男女间隔，如图：



对于 A 的女朋友 a 来说，只有 2 个位置可选，如果 a 坐在 B—C 之间，则 C—D 只能坐 B 的女朋友

b,D—A 只能坐 C 的女朋友 c,A—B 只能坐 D 的女朋友 d,所以只要一个位置确定了,其他人的位置也就相应确定了。

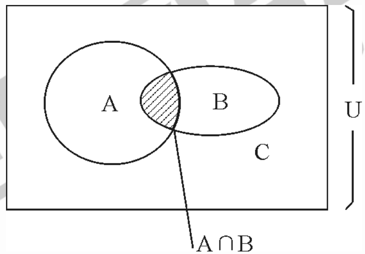
根据乘法原理,共有 $6\times2=12$ 种方法。

第六堂 ★★容斥原理

容斥原理:二集合容斥

一、知识点记忆

为了便于理解和记忆,我们通过图示来展示知识点,这也是容斥原理重要的解题思路。



对于二集合容斥来说,有下列等式可以从图中得出:

1. $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

2.“满足条件 A 的个数”+“满足条件 B 的个数”-“条件 A、B 都满足的个数”=“总数”-“条件 A、B 都不满足的个数”($|A \cup B| = |U| - |C|$)

3.如果“只满足条件 A”的个数为 x,“只满足条件 B”的个数为 y,“同时满足 A、B 两个条件”的个数 z,

则 $|A| + |B| = x + y + 2z$,$|A \cup B| = x + y + z$

在考试中,二集合容斥一般涉及两种题型:

1.如果题目涉及:①满足条件 A 的个数;②满足条件 B 的个数;③同时满足条件 A、B 的个数;④条件 A、B 都不满足的个数;⑤总数。这时候采用标准公式 1、2 作答。

2.如果题目涉及:“只满足条件 A 的个数”或者“只满足条件 B 的个数”时,标准公式无法解答,这时采用 3 或者文氏图来作答。文氏图的关键是从“两个条件都满足的个数”入手,由内往外标。

特别要注意审题,留意是否有“只满足某个条件”。

二、常考题型

【例 1】某单位 46 名职员都订了报纸,订阅《人民日报》的有 41 人,订阅《环球时报》的有 32 人,问有多少人两种报纸都订阅?( )

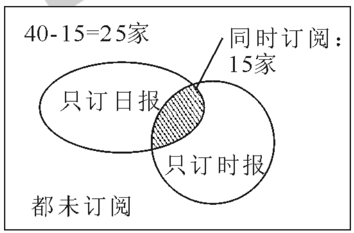
A. 17 B. 27 C. 37 D. 40

【解析】直接应用标准公式:$|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B| = 41 + 32 - 46 = 27$(人)。

【例 2】某小区有 40%的住户订阅日报,有 15%的住户同时订阅日报和时报,至少有 75%的住户至少订阅两种报纸中的一种,问只订阅时报的住户比例至少为多少?( )

A. 35% B. 50% C. 55% D. 60%

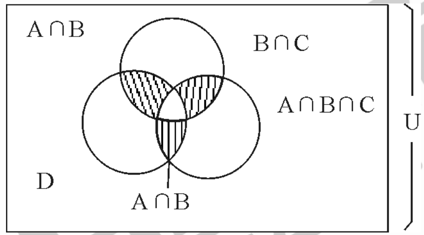
【解析】题目中都是比例关系,为了形象理解题目关系,我们假设这个小区有 100 家住户。则 40 家住户订阅日报,15 家同时订阅日报和时报,至少 75 家订阅了至少一种报纸。



题目要求订阅时报的最小比例,需要订阅时报的人数最少。已知至少 75 家订阅了至少一种报纸,也就是 $|A \cup B| = 75$,所以只订阅时报的住户至少为 $75 - 25 - 15 = 35$ 家。比例为 $\frac{35}{100} = 35\%$。选 A。

容斥原理:三集合容斥

一、知识点记忆



三集合容斥比二集合要复杂,主要等式有:

1. $|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$

2. $|A\cup B\cup C|=|U|-|D|$

3.仅满足两个条件的集合$=|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|-3|A\cap B\cap C|$(每个交集都包括了一次满足 3 个条件的集合,所以要减去 3 次满足 3 个条件的集合)

4. $|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|$ −满足两个条件的集合−2×满足 3 个条件的集合。(满足两个条件的集合多算了一次,满足三个条件的集合多算了两次,所以要减去)

5.假设只满足一个条件的个数为 x,只满足两个条件的个数为 y,同时满足三个条件的个数为 z,从图中可以得出:

(1) $|A\cup B\cup C|=x+y+z$

(2) $|A|+|B|+|C|=x+2y+3z$

上述两个式子非常重要,当题目中涉及"只满足一个条件的数目"和"只满足两个条件的数目",只给了我们一个总数而不是分项的数字,一般选用上述两个式子作答。要特别注意是否有"同时满足三

个条件”的情况存在。

二、常考题型

【例 1】某旅行团共有 48 名游客，都报名参观了三个景点中的至少一个。其中，只参观了一个景点的人数与至少参观了两个景点的人数相同，是参观了三个景点人数的 4 倍。则需要为这些游客购买多少张景点门票？（　　）

A. 48　　B. 72　　C. 78　　D. 84

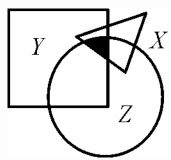
【解析】每个景点都需要一张门票。至少参观了两个景点=只参观了 2 个景点的人数+参观了 3 个景点的人数。若只参观一个景点的人数为 x，只参观了两个景点的人数为 y，参观三个景点的人数为 z，则：

$x=y+z=4z$，$x+y+z=48$，

解得：$x=24$，$y=18$，$z=6$，

由于每人进入每个景点都需要门票，所以需要门票数为 $x+2y+3z=78$（张）。选 C。

【例 2】如图所示，X、Y、Z 分别是面积为 64、180、160 的三张不同形状的纸片。它们部分重叠放在一起盖在桌面上，总共盖住的面积为 290。且 X 与 Y、Y 与 Z、Z 与 X 重叠部分面积分别为 24、70、36。问阴影部分的面积是多少？（　　）



A. 15　　B. 16　　C. 14　　D. 18

【解析】认真分析题干信息，列出已知条件：

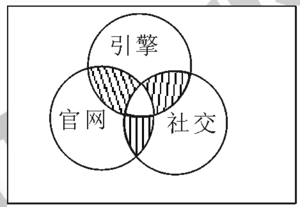
$|x|=64$，$|y|=180$，$|z|=160$，$|x\cup y\cup z|=290$，$|x\cap y|=24$，$|y\cap z|=70$，$|z\cap x|=36$，求 $|x\cap y\cap z|=$？显然符合三集合容斥标准公式。

$|x \cap y \cap z| = |x \cup y \cup z| - |x| - |y| - |z| + |x \cap y| + |y \cap z| + |z \cap x| = 16$。选 B。

【例 3】某企业调查用户从网络获取信息的习惯，问卷回收率为 90%。调查对象中有 179 人使用搜索引擎获取信息，146 人从官方网站获取信息，246 人从社交网络获取信息，同时使用这三种方式的有 115 人，使用其中两种的有 24 人，另有 52 人这三种方式都不使用。问这次调查共发出了多少份问卷？（　　）

A. 310　　　　B. 360　　　　C. 390　　　　D. 410

【解析】我们在文氏图中清晰标示题干已知条件：



集合|A|=|使用搜索引擎|=179人
集合|B|=|使用官网|=146人
集合|C|=|使用社交网络|=246人
|同时满足两项条件的|=24
|同时满足三项条件的|=115人
|一项都不满足的|=52人

显然，如果我们求出“只满足一个条件的”数量，就可以求出所有问卷的数量。

设“只满足一个条件的”为 x 人，根据 $|A|+|B|+|C| = x+2y+3z$，得出：

$x+2\times24+3\times115=179+146+246$，解出 $x=178$

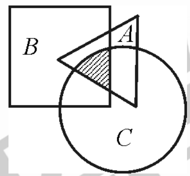
发放问卷总数 $=(|A \cup B \cup C| + |$一个条件都不满足的$|) \div 90\% = (178+24+115+52) \div 0.9 = 410$。选 D。

本题还可以根据三集合容斥原理式子 4，将使用两种方式的去掉重复的 1 次、使用三种方式的去掉重复的 2 次，得出：$179+146+246-24-2\times115=$ 总人数 -52，求出总人数，然后再除以 90%，也能得出答案。

我们要注意数学运算题型的稳定性和借鉴性：

例 2 是 2009 年国家公务员录用考试真题，而 2011 年安徽省公务员录用考试真题中有一道题：

如图所示：A、B、C 分别是面积为 60、170、150 的三张不同形状的卡片，它们部分重叠放在一起盖在桌面上，总共盖住的面积为 280，且 A 与 B、B 与 C、C 与 A 重叠部分的面积分别是 22、60、35。问阴影部分的面积是多少？（　　）



A. 15　　　　B. 16　　　　C. 17　　　　D. 18

怎么样，是不是几乎完全一样？如果先做通了例 2，然后去参加安徽这场考试，这一道题简直是白送分。

例 3 是 2015 年国家公务员录用考试真题，而 2010 年国家公务员录用考试真题中有一道题：

某高校对一些学生进行问卷调查。在接受调查的学生中，准备参加注册会计师考试的有 63 人，准备参加英语六级考试的有 89 人，准备参加计算机考试的有 47 人，三种考试都准备参加的有 24 人，准备选择两种考试都参加的有 46 人，不参加其中任何一种考试的有 15 人。问接受调查的学生共有多少人？（　　）

A. 120　　　　B. 144　　　　C. 177　　　　D. 192

显然，这两道题的算法也一致。这也是数学运算要多做真题的原因。台上一分钟，台下十年功。数学运算的秒杀，是靠考场外大量的运算、熟悉乃至精通题型来支撑的。

第七堂　★★★概率问题

一、知识点记忆

在条件S下，一定会发生的事件，叫相对于条件S的必然事件；一定不会发生的事件，叫相对于条件S的不可能事件；可能发生也可能不发生的事件，叫相对于条件S的随机事件。必然事件概率为1，不可能事件概率为0，因此$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$。概率从数量上反映了随机事件发生的可能性的大小。在考试中可能遇到的概率问题包括古典概率与几何概率两种。

1. 古典概率概型的使用条件：试验结果的有限性和所有结果的等可能性。

古典概率概型的解题步骤：第一步，求出总的基本事件数；第二步，求出事件A所包含的基本事件数，然后利用公式$P(A)=\frac{\text{事件 A 包含的基本事件数}}{\text{总的基本事件数}}$求出概率。

2.几何概率概型的使用条件：(1)试验中所有可能出现的结果(基本事件)有无限多个；(2)每个基本事件出现的可能性相等。

几何概率概型的解题步骤：第一步，求出总几何面积；第二步，求出事件A的几何面积，然后利用公式$P(A)=\frac{\text{事件 A 的几何面积}}{\text{总几何面积}}$求出概率。

3.分步概率＝满足条件的每个步骤概率之积。(题目多表述为完成既定情形需要分多个步骤)

4.分类概率＝满足条件的各种情况概率之和。(题目表述多为满足要求的情形有多种)

5.某条件成立概率＝1－该条件不成立概率。(对于正面计算情况比较复杂的题目，经常要用到这种逆向思路)

6.条件概率："A成立"时"B成立"的概率＝$\frac{A\text{、}B\text{ 同时成立的概率}}{A\text{ 成立的概率}}$。

7.(补充知识点)如果事件A与B不可能同时发生，则称A、B为互斥事件；如果A、B不可能同时

发生,但必然有一个发生,则它们是对立事件。对于事件 A、B,若 A 的发生与 B 的发生互不影响,则称 A、B 是相互独立事件。n 次独立重复试验中 A 恰好发生 k 次的求法:

n 次独立重复试验中事件 A 恰好发生 k 次可以看作是 C_n^k 个互斥事件的和,其中每一个事件都可以看作是 k 个 A 事件与$(n-k)$个 $\bar{A}$ 事件同时发生,其发生的概率都是 $p^k(1-p)^{n-k}$,因此,n 次独立重复试验中事件 A 恰好发生 k 次的概率为 $C_n^k \cdot p^k(1-p)^{n-k}$。

二、常考题型

1.基本概念型

对于基本概念型题目,一定要将事件总数和满足条件的事件数求解清楚,不能重复计数,也不能遗漏,比如在一个典型的掷骰子游戏中,随意掷 2 枚骰子,朝上的数字和是 3 的概率是多少?有些同学这么思考,2 枚骰子朝上的数字和有 2、3、4、5、6、7、8、9、10、11、12 共 11 种可能,和是 3 的概率正好是 1/11 啊。这么算显然是错误的,因为这些和的概率是不相等的。基本事件是投掷 2 枚骰子,共有 6×6=36 种可能,其中和为 3 的只有(1,2)和(2,1)两种情况,因此概率应为 2/36=1/18。

【例 1】将自然数 1—100 分别写在完全相同的 100 张卡片上,然后打乱卡片,先后随机取出 4 张,问这 4 张先后取出的卡片上的数字呈增序的几率是多少?( )

A. $\frac{1}{16}$　　B. $\frac{1}{24}$　　C. $\frac{1}{32}$　　D. $\frac{1}{72}$

【解析】第一步,求出事件总数。对于任意 4 张卡片,共有 A_4^4 种不同的排列方式;

第二步,求出满足条件的事件数。4 张卡片呈增序,只有 1 种排列方式;

第三步,根据公式求出概率。$P(A)=\frac{1}{24}$。

【例 2】根据天气预报,未来 4 天中每天下雨的概率约为 0.6,则未来 4 天中仅有 1 天下雨的概率 p 约为(　　)。

A. $0.03<p<0.05$　　B. $0.06<p<0.09$

C. $0.13<p<0.16$　　D. $0.16<p<0.36$

【解析】(思路 1)第一天下雨,其他三天不下雨,概率 P(1)=0.6×(1−0.6)×(1−0.6)×(1−0.6);第二天下雨,其他三天不下雨,概率 P(2)=0.6×(1−0.6)×(1−0.6)×(1−0.6);第三天下雨,其他三天不下雨,概率 P(3)=0.6×(1−0.6)×(1−0.6)×(1−0.6);第四天下雨,其他三天不下雨,概率 P(4)=0.6×(1−0.6)×(1−0.6)×(1−0.6)。所以,仅有 1 天下雨的概率 P=0.6×(1−0.6)×(1−0.6)×(1−0.6)×4=0.1536。选 C。

(思路 2)可以看作 n 次独立重复实验,直接应用公式:$C_4^1\times0.6\times(1-0.6)^{4-1}=0.1536$。选择 C。

【例 3】有 5 对夫妇参加一场婚宴,他们被安排在一张 10 个座位的圆桌就餐,但是婚礼操办者并不知道他们彼此之间的关系,只是随机安排座位。问 5 对夫妇恰好都被安排在一起相邻而坐的概率是多少?(   )

A. 在 1‰到 5‰之间　　B. 在 5‰到 1%之间

C. 超过 1%　　D. 不超过 1‰

【解析】第一步,求出基本事件总数。5 对夫妇共 10 人,进行环状排序有 $\frac{A_{10}^{10}}{10}$ 种方法;

第二步,求出满足条件的基本事件数。将每对夫妇捆绑,进行环状排序有 $\frac{A_5^5}{5}$ 种方法,其中每对夫妇都可以互换位置,共有 2^5 种方法,因此,满足条件的基本事件数为 $2^5\times\frac{A_5^5}{5}$ 种。

第三步,根据公式求出概率。$P(A)=\frac{\text{满足条件的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}=\frac{2}{945}$,选 A。

2.分类概率型

题目表述为满足要求的情形有多种,我们求出每种情形的概率,然后将所有概率相加即可。

【例】速算比赛中,小李全对的概率为 95%,小杨全对的概率为 92%,问这次比赛中两人只有一个人全对的概率为(   )。

A. 0.046　　B. 0.076　　C. 0.122　　D. 0.0874

【解析】小李全对概率为95%，则小李不全对的概率为1－95%；同理，小杨不全对概率为1－92%。

第一步，了解基本事件情形。只有一人全对包括两类情况：

1.小李全对∧小杨不全对，概率为95%×(1－92%)

2.小杨全对∧小李不全对，概率为92%×(1－95%)

第二步，求出总概率：95%×(1－92%)＋92%×(1－95%)＝0.122。

当然，上面的计算量还是比较大的，如果我们直接算出小李不全对的概率为5%，小杨不全对的概率为8%，将式子转化为95%×8%＋92%×5%＝(1－5%)×8%＋(1－8%)×5%＝5%＋8%－2×5%×8%＝0.122。这样计算量就大大减小。选C。

3.分步概率型

题目表述为要完成既定情形需要分n步，将每步的概率计算出来然后相乘即可。这与乘法原理类似：分步用乘法，分类用加法。

【例】有5对夫妇参加一场婚宴，他们被安排在一张10个座位的圆桌就餐，但是婚礼操办者并不知道他们彼此之间的关系，只是随机安排座位。问5对夫妇恰好都被安排在一起相邻而坐的概率是多少？(　　)

A. 在1‰到5‰之间　　　　B. 在5‰到1%之间

C. 超过1%　　　　D. 不超过1‰

【解析】在前面，我们讲过这道题，用的是环状排序直接求解。现在我们来用分步概率求解。

每位妻子对于丈夫可能坐在左边，也可能坐在右边，两种情况概率相同。我们以右边为例。

第一步，第一个男人先入座，从剩余的9个人中选出其妻子，概率为$\frac{1}{9}$；第二个男人入座，从剩下的7个人中选出其妻子概率为$\frac{1}{7}$；第三个男人入座，从剩下的5个人中选出其妻子概率为$\frac{1}{5}$；第四个

男人入座，从剩下的 3 个人中选出其妻子概率为 $\frac{1}{3}$；第五个男人入座，只剩下 1 个人，选出他妻子为必然事件，概率为 1。根据分步原理，妻子在丈夫右边的概率为 $\frac{1}{9}\times\frac{1}{7}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{3}\times1=\frac{1}{945}$；妻子坐在丈夫左边的概率也为 $\frac{1}{945}$。所以夫妻恰好相邻的概率为 $\frac{2}{945}$。选 A。

4.几何概率型

几何概率型在公务员考试中出现频率不高，仅在一些省考中偶尔出现，不过我们还是要熟悉这类题型。作答几何概率的题目，关键是确定符合条件的事件所占的几何图形区域，一定要认真排查。

注意：几何概率题型一般不是题目中给定几何图形，而是解题必须借助几何图形来作答。

判断几何概率依据：基本事件以及满足条件的基本事件总数是否可以枚举，各个事件发生的概率是否相等。

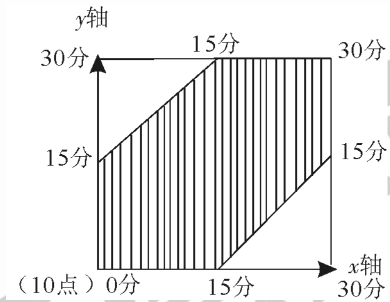
公式：$P(A)=\frac{\text{事件 }A\text{ 的几何面积}}{\text{总几何面积}}$

【例】甲、乙两人相约见面，并约定第一人到达后等 15 分钟不见第二人来就可以离去。假设他们都在 10 点至 10 点半的任一时间来到见面地点，则两人能见面的概率有多大？（　　）

A. 37.5%　　B. 50%　　C. 62.5%　　D. 75%

【解析】两个人到的时间位于 10 点至 10 点半之间，显然，本题的基本事件不可枚举，必须借助几何图形来作答。

我们设甲、乙分别在 10 点 x 分、y 分到达指定地点，则 $x-y$ 或 $y-x$ 小于或等于 15 分钟时，两人才能见面，即满足条件的事件为：$|x-y|\leqslant15$。我们据此画出几何图形：



阴影部分为 $|x-y| \leqslant 15$ 在 $[0,30]$ 的图像，表示两人可以相遇。显然，占整个图形面积的 $\frac{3}{4}$，即 75%。选 D。

5.拓展题型

(1)期望相关

期望是算数平均值概念的推广，是概率意义下的平均。期望的求法为随意变量取值与相应概率值分别相乘后相加。

如果随机试验的结果可以用一个变量来表示，那么这样的变量叫做随机变量；按一定的次序随机列出，这样的随机变量叫做离散型随机变量。如果离散型随机变量 ε 可能的取值是 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_i, \cdots, x_n$，$\varepsilon$ 每取一个值，对应的概率为 $P_1, P_2, P_3, \cdots, P_i, \cdots, P_n$，满足 $P_1+P_2+P_3+\cdots+P_i+P_n=1$。期望 $=x_1P_1+x_2P_2+x_3P_3+\cdots+x_nP_n$。所以求解期望，关键是列出变量取值对应的相应概率。

在公务员考试中，遇到求解期望的题目的概率很小，但是也有考查过，牢记公式就可以了。

【例】某商场以摸奖的方式回馈顾客，盒内有 5 个乒乓球，其中 1 个为红色，2 个为黄色，2 个为白色，每位顾客从中任意摸出一个球，摸到红球奖 10 元，黄球奖 1 元，白球无奖励，则每一位顾客所获奖

励的期望值为多少元？（　　）

A. 10　　　　B. 1.2　　　　C. 2　　　　D. 2.4

【解析】求解期望，首先列出变量取值对应的概率：

摸到红球的概率 P(红)$=\frac{1}{5}$；摸到黄球的概率 P(黄)$=\frac{2}{5}$；摸到白球的概率 P(白)$=\frac{2}{5}$，($\frac{1}{5}+\frac{2}{5}+\frac{2}{5}=1$)，所以期望是 $10\times\frac{1}{5}+1\times\frac{2}{5}+0\times\frac{2}{5}=2.4$(元)。选 D。

(2)条件概率

牢记条件概率公式：“A 成立”时“B 成立”的概率$=\frac{A、B\text{ 同时成立的概率}}{A\text{ 成立的概率}}$

【例】小孙的口袋里有四颗糖，一颗巧克力味的，一颗果味的，两颗牛奶味的。小孙任意从口袋里取出两颗糖，他看了看后说，其中一颗是牛奶味的。问小孙取出的另一颗糖也是牛奶味的可能性(概率)是多少？（　　）

A. $\frac{1}{3}$　　　　B. $\frac{1}{4}$　　　　C. $\frac{1}{5}$　　　　D. $\frac{1}{6}$

【解析】如果事件 A＝一颗是牛奶味，事件 B＝另一颗是牛奶味，则题目是在事件 A 已经发生的情况下求事件 B 发生的概率。符合条件概率情形。

$P=\frac{A、B\text{ 同时成立的概率}}{A\text{ 成立的概率}}=\frac{1}{6}\div\frac{5}{6}=\frac{1}{5}$。选 C。

说明：也可以使用枚举法。将所有情形都列出来：

奶 1、巧	奶 2、巧
奶 1、果	奶 2、果
果、巧	奶 1、奶 2

满足“2 个都是奶糖”只有 1 种情况，满足“1 块是奶糖”有 5 种情况，所以条件概率为 $\frac{1}{5}$ 。选 C。

(3)难度大的期望

一般题目中出现概率，结果不是让我们求概率，而是求平均值。这时候一般就是考查期望。

【例】某军训部队到打靶场进行射击训练，队员甲每次射击的命中率为 50%，队员乙每次射击的命中率为 80%，教练规定当天的训练规则是，每个队员射击直到未中靶一次则停止射击，则队员甲当天平均射击次数为(　　)。

A. 2 次　　B. 1.23 次

C. 2.5 次　　D. 1.5 次

【解析】这道题求队员甲当天射击的平均次数，也就是求概率下的平均值，即期望。

我们需要分析概率分布列：

如果甲打了 1 枪，说明肯定没中，概率是 0.5；

如果甲打了 2 枪，说明第一枪中，第二枪没中，概率是 $0.5\times0.5=0.5^2$；

如果甲打了 3 枪，说明前两枪中，第三枪没中，概率是 $0.5\times0.5\times0.5=0.5^3$；

如果甲打了 4 枪，……概率是 0.5^4；

……

如果甲打了 n 枪，……概率是 0.5^n。

所以甲当天平均打枪次数，也就是期望 $E=1\times0.5+2\times0.5^2+3\times0.5^3+4\times0.5^4+\cdots+n\times0.5^n$；①

将上式左右同时乘以 0.5，得到 $0.5E=1\times0.5^2+2\times0.5^3+3\times0.5^4+4\times0.5^5+\cdots+n\times0.5^{n+1}$；②

①－②得到：

$0.5E=(0.5+0.5^2+0.5^3+\cdots+0.5^n)-n\times0.5^{n+1}=\frac{0.5\times(1-0.5^n)}{1-0.5}-n\times0.5^{n+1}=1-0.5^n-n\times0.5^{n+1}$；

根据指数函数图像，当 $n \to +\infty$ 时，0.5^n、$n \times 0.5^{n+1}$ 图像无限接近 x 轴，即值趋为 0，所以 $0.5E=1$，$E=2$。选 A。

上面的解法在考场上是很浪费时间的，下面给出李委明老师的秒杀法：

甲每次射击的命中率都为 50%，所以命中与未命中的靶数，平均来讲应该是一样的。由于甲肯定未命中 1 靶，所以命中的平均数也是 1 靶，总数平均为 2 靶，选择 A。

第八堂 ★★极值问题

极值问题:抽屉原理

抽屉原理是组合数学的基本原理,如果有11只鸽子飞进10个鸽笼,那么一定有一个鸽笼至少飞进2只鸽子。这就是鸽笼原理,也叫做“抽屉原理”。用它可以解决很多棘手的问题。

一、知识点记忆

1.原理一:将多于n件的物体任意放到n个抽屉中,那么至少有一个抽屉中的物体不少于2件。

2.原理二:将多于m×n件的物体任意放到n个抽屉中,那么至少有一个抽屉中的物体不少于(m+1)件。

题目一般表述为“至少…保证…”,一般考虑最不利原则,也就是考虑对需要满足的条件“最不利”的情形,最后加1即可。

二、常考题型

【例1】有300名求职者参加高端人才专场招聘会,其中软件设计类、市场营销类、财务管理类和人力资源管理类分别有100、80、70和50人。问至少有多少人找到工作,才能保证一定有70名找到工作的人专业相同?( )

A. 71　　B. 119　　C. 258　　D. 277

【解析】第一步,构造最不利情形。最不利的情形是同一个专业的人最多有69名找到工作,这时候只要再有任意一名求职者找到工作,就满足70人专业相同。所以专业人数大于或者等于69的,取69;小于69的,全部取。

69+69+69+50=257(名)

第二步,最不利情形+1。所以至少258名同学找到工作,才能保证一定有70名找到工作的人专业相同。选C。

【例2】某区要从10位候选人中投票选举人大代表,现规定每位选举人必须从这10位中任选两位

投票。问至少要有多少位选举人参加投票,才能保证有不少于 10 位选举人投了相同两位候选人的票?(　　)

A. 382 位　　B. 406 位　　C. 451 位　　D. 516 位

【解析】第一步,构造抽屉。从 10 位候选人中任选 2 位,共有 $C_{10}^{2}=45$ 种情况。即构造 45 个抽屉。

第二步,根据抽屉原理二,多于 m×n 件的物体任意放到 n 个抽屉中,那么至少有一个抽屉中的物体不少于(m+1)件。要求不少于 10 人(9+1)投了相同两位候选人的票,也就是位于同一个抽屉中,需要多于 45×9=405 人,所以至少是 405+1=406 人。选 B。

(或者利用最不利情形去思考,45 种候选方案,如果每种最多有 9 人投票,需要 405 人,此时再有任意一人投票,必然有一种方案有 10 人投票,所以是 406 人)

【例 3】有编号为 1—13 的卡片,每个编号有 4 张,共 52 张卡片。问至少摸出多少张,就可保证一定有 3 张卡片编号相连?(　　)

A. 27 张　　B. 29 张　　C. 33 张　　D. 37 张

【解析】第一步,构造最不利情形。摸出的卡片只有 2 张编号相连:1、2,4、5,7、8,10、11,13,一共 9 个数字,其中每个数字编号都有 4 张,一共是 4×9=36 张卡片。

第二步,最不利+1。所以,至少摸出 37 张卡片,可以保证一定有 3 张相连(剩下的卡片是编号 3、6、9、12 各四张,任取一张就可以保证 3 张编号相连),选 D。

极值问题:极端构造

一、题型解读

现在很多题目中都出现最多、最少、最大、最小等字样,这时候我们一般采用极端构造法,从正向或反向构造出利于求解的条件,解题多采用极端思维、列表分析、方程法等基本技巧,题目难度不大,关键是构造有利情形,便于我们解题。

二、常见题型

1.设定构造

直接构造出符合题意的情形。

【例 1】有 4 支队伍进行 4 项体育比赛，每项比赛的第一、第二、第三、第四名分别得到 5，3，2，1 分。每队的 4 项比赛的得分之和算作总分，如果已知各队的总分不相同，并且 A 队获得了三项比赛的第一名，问总分最少的队伍最多得多少分？（　　）

A. 7　　B. 8　　C. 9　　D. 10

【解析】第一步，理解题意。每一项比赛，成绩之和都是 $5+3+2+1=11$ 分。所以四支队伍参加四项比赛的总分是 $11\times4=44$ 分，平均成绩是 11 分。

第二步，构造情形。如果要使得总分最少的队伍得分最多，因为总成绩一定，所以得分最高的队伍得分要尽量少，并且四支队伍都接近平均成绩。A 队已经获得三项第一，要使得得分尽可能少，所以另一项需要为第四名，得分为 $5\times3+1=16$ 分。其他三队得分综合 $44-16=28$ 分。

第三步，大胆猜测。每队成绩不同，得分和 28 分，使得成绩尽量平均分布，$28\div3=9\cdots1$。当最少的是 9 分时，另外两队即使得分尽可能低，为 10 分和 11 分，总分为 $9+10+11=30$ 分 >28 分，不符合题意；所以最少的应为 8 分，其他两队为 9 分，11 分。选 B。

验证：

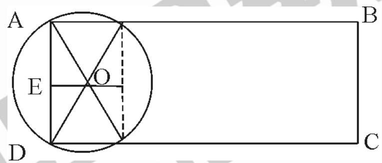
	第一项比赛	第二项比赛	第三项比赛	第四项比赛	总分
A 队	5 分	5 分	5 分	1 分	16 分
B 队	3 分	3 分	3 分	2 分	11 分
C 队	2 分	1 分	1 分	5 分	9 分
D 队	1 分	2 分	2 分	3 分	8 分

(表格情况并不唯一,这只是满足题意的一种情形。)

【例 2】现要在一块长25公里、宽8公里的长方形区域内设置哨塔,每个哨塔的监视半径为5公里,如果要求整个区域内的每个角落都能被监视到,则至少需要设置多少个哨塔?(　　)

A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 7

【解析】因为哨塔的监视直径为 $5\times2=10$(公里),大于长方形的宽。所以宽完全可以被监视到,我们只需要考虑长如何被全部监视。



如图,大圆要尽量减少重叠,而且必须覆盖全部长方形区域。相邻两个大圆的两个交点必须位于长方形长边上,才能保证全部监视。此时每个大圆实际完全监视的是一个如图的长方形区域。其中 $|AO|=5$, $|AE|=\frac{|AD|}{2}=4$,根据勾股定理, $|EO|=3$,所以实际监视长边为 $2\times3=6$(公里)。长方形长边长25公里, $25\div6=4\cdots1$,所以至少需要5个哨塔。选 B。

2.数列构造

题目一般是给出一列有大小顺序的数,或者给出总数,问其中的某个位置最多或最少是多少。某个位置最多,其他位置则尽可能地少;某个位置最少,其他位置则尽可能地多,我们根据项数列出方程就可以求解。

审题时一定要注意结果必须是整数还是允许保留小数。

【例 1】有30名学生,参加一次满分为100分的考试,已知该次考试的平均分是85分,问不及格(小于60分)的学生最多有几人?(　　)

A. 9人　　B. 10人　　C. 11人　　D. 12人

【解析】(这种思路主要是为了理解为什么及格的学生、不及格的学生成绩都要尽可能高,才能使得不及格学生人数最多。在考场上我会直接利用这个结论进行计算,节省时间)

这道题的关键是抓住平均分。在一个 n 项数列中,每一项都减去平均数后,得到的数字相加,和恒为0。(设 a、b、c、d 的平均数为 e,$(a-e)+(b-e)+(c-e)+(d-e)=a+b+c+d-4e$,因为 $e=\frac{a+b+c+d}{4}$,所以结果是0)

我们将所有考生的成绩都减去平均分85作为相对成绩,成绩相加所得的和一定为0。

若使不及格的学生最多(不及格的学生相对成绩为负数),则及格的人数尽可能地少,因为和为0,所以及格学生的相对成绩应都为正数且尽可能地大,成绩都取100分,相对成绩为 $100-85=15$ 分。

不及格学生的相对成绩为负数,要使得不及格的学生数量最多,则相对成绩的绝对值应尽可能小,(比如,如果是 -10,绝对值为2的负数可以有5名,绝对值为5的负数则只有2名),因此与平均分的差距要尽可能地小,所以取59分,相对成绩为 $59-85=-26$ 分。

据此,我们设不及格的人数为 x,则及格的人数为 $(30-x)$,得到:

$15\times(30-x)+(-26)\times x=0$,解得 $x\approx10.98$。

当 x 取10的时候,$85\times30-10\times59=1960$,显然及格的学生是19个100分,1个60分。因为题目中没有限定所有学生的成绩必须是整数,我们将60分的学生拿出1分,平均分给5个得59分的学生,满足题意,所以不及格的学生,最多有11人。选C。

【例2】老王和老赵分别参加4门培训课的考试,两人的平均分数分别为82和90分,单个人的每门成绩都为整数且彼此不相等。其中老王成绩最高的一门和老赵成绩最低的一门课分数相同,问老赵成绩最高的一门课最多比老王成绩最低的一门课高多少分?(　　)

A. 20　　　　B.22　　　　C. 24　　　　D.26

【解析】看到两人的平均分数,马上联想到总数,如果知道每门的成绩,就可以列出等式。

老王最高的一门与老赵最低的一门分数相同,这句话搭建了两人成绩之间的关系。我们不妨设老王最高的一门成绩为 x,则老赵最低的一门成绩也为 x。

要求成绩差的最大值，需要老赵最高一门的成绩尽可能高，设为 y，则其他三门成绩尽可能低，为 x、$x+1$、$x+2$；老王最低一门成绩要尽可能低，设为 z，则其他三门为 x、$x-1$、$x-2$。

则 $x+(x+1)+(x+2)+y=90\times4$…………①

$x+(x-1)+(x-2)+z=82\times4$……………②

2 个等式、3 个未知数，显然不能求出每个未知数的具体值，但我们需要求的是$(y-z)$的值，①－②即得出 $y-z=26$。选 D。

3.反向构造

有的题目看上去是容斥原理，但是它给出的集合多于 3 个，从正面考虑很浪费时间，这时候我们可以从反面思考，构造出满足条件的极端情形得出答案。

【例 1】建华中学共有 1600 名学生，其中喜欢乒乓球的有 1180 人，喜欢羽毛球的有 1360 人，喜欢篮球的有 1250 人，喜欢足球的有 1040 人，问以上四项球类运动都喜欢的至少有几人？（　　）

A. 20 人　　B. 30 人　　C. 40 人　　D. 50 人

【解析】这道题看上去是四集合容斥问题，正面求解很麻烦，我们可以逆向思考。

四种运动，不喜欢乒乓球的有 1600－1180＝420（人），不喜欢羽毛球的有 1600－1360＝240（人），不喜欢篮球的有 1600－1250＝350（人），不喜欢足球的有 1600－1040＝560（人）。

要使得四种运动都喜欢的人尽量少，则至少有一种运动不喜欢的人尽量多，最有利的情况是分别不喜欢四种球类运动的人之间没有交集，那么人数就是这四个数字相加：420＋240＋350＋560＝1570（人）。所以四种运动都喜欢的至少 1600－1570＝30（人）。选 B。

【例 2】共有 100 个人参加某公司的招聘考试，考试的内容共有 5 道题，1—5 题分别有 80 人、92 人、86 人、78 人和 74 人答对。答对 3 道和 3 道以上的人员能通过考试，请问至少有多少人能通过这次考试？（　　）

A. 30　　B. 55　　C. 70　　D. 74

【解析】1—5 题答错的分别有 20 人、8 人、14 人、22 人和 26 人，一共是 90 人，也就是一共有 90 道题目答错。如果使得通过的人最少，则没通过的人应该最多。错题的总量一定，答错 3 道、4 道、5 道

都不能通过考试，所以当每个人错 3 道的时候，不能通过的人数最多，为 $90\div3=30$(人)。所以至少有 70 人能通过考试。选 C。

极值问题：不等式

一、知识点记忆

前面讲的更多的是思路大于知识，所以思路更加重要。除此以外，我们还可以借助基本不等式来求解这类问题。不等式可以看作是方程的延伸，在解题中运用不等式，可以根据变量的范围确定最大值或最小值。它最直接的运用便是根据题干中的条件列出不等式，然后求解，最终得出答案。

关于平均数，若 a、b 是正实数，则有 $a+b\geqslant2\sqrt{ab}$，而且当 $a=b$ 时取等号。这也就是说，两个整数相加和一定，当它们接近时，它们的乘积变大，当它们相等时，它们的乘积最大。对于三个数依然成立。这个结论很重要。

说明：实际上这也是我们经常用到的几个平均数概念：

1.算术平均数：是指各项数据和除以项数。如 1、4、8 的算术平均数 $=\frac{13}{3}=4\frac{1}{3}$。

2.调和平均数：又称倒数平均数，是总体各统计变量倒数的算术平均数的倒数。比如，1、4、8 的调和平均数 $=\frac{1}{(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+1)\div3}=\frac{24}{11}=2\frac{2}{11}$。当其中一个数字为 0 的时候不能计算调和平均数。

3.几何平均数：是指 n 个观察值连乘，积的 n 次方根。比如 1、4、8 的几何平均数 $=\sqrt[3]{1\times4\times8}=2\sqrt[3]{4}$。

4.平方平均数：一组数据的平方的平均数的算术平方根叫做平方平均数。如 1、4、8 的平方平均数 $=\sqrt{\frac{1+4^2+8^2}{3}}=3\sqrt{3}$。

这几种平均数的大小关系是：调和平均数≤几何平均数≤算术平均数≤平方平均数，而且当各项

数字相等时取等号。

二、常考题型

【例 1】某县筹备县庆，园林部门决定利用现有的 3490 盆甲种花卉和 2950 盆乙种花卉搭配 A、B 两种园艺造型共 50 个摆放在迎宾大道两侧。已知搭配一个 A 种造型需甲种花卉 80 盆，乙种花卉 40 盆；搭配一个 B 种造型需甲种花卉 50 盆，乙种花卉 90 盆，则搭配方案共有（　　）。

A. 3 种　　B. 4 种　　C. 5 种　　D. 6 种

【解析】假设 A 种造型 x 个，则 B 种造型为（50－x）个。因为甲、乙两种花卉总量固定，两种造型需要的花卉总量必然小于或等于甲、乙两种花卉总量，据此，我们可以得出不等式组：

$$\begin{cases}80x+50(50-x)\leqslant 3490\\40x+90(50-x)\leqslant 2950\end{cases}$$

解得 $31\leqslant x\leqslant 33$，所以 A 种造型可以取 31、32、33 三种情况，此时对应的 B 种造型有 19、18、17 三种，所以选择 A。

【例 2】某人想用 20 块长 2 米、宽 1.2 米的金属网建一个靠墙的长方形鸡窝。为防止鸡飞出去，鸡窝的高度不得低于 2 米，要使所建鸡窝的面积最大，长度需要多少米？（　　）

A. 12　　B. 13　　C. 10　　D. 11

【解析】因为鸡窝的高度不低于 2 米，所以金属网应该用长边作为高，这样的话鸡窝的三边长共 $20\times 1.2=24$ 米。我们假设鸡窝长 a 米，宽 b 米，因为鸡窝靠墙，选择长边靠墙，则需要围起来的三边和为 $a+2b=24$ 米，要求面积最大，即求 $a\cdot b$ 的最大值。

$a+2b\geqslant 2\sqrt{2ab}$，当 $a=2b$ 时候，$2a\cdot b$ 取得最大值，此时 $a\cdot b$ 也最大，所以长应该为 12 米。选 A。

附录　数量关系之超级速算法

一、直接代入法

Q1.WHAT—是什么

直接代入法，是将数学运算的各个选项逐个代入试题中验证出正确答案的方法，这种方法是公职类考试中职业能力测验科目中数量关系模块的数学运算题型应用最广的方法，也可以应用到职业能力测验的其他模块的一些题型中，被称之为“行测第一方法”。

Q2.WHY—为什么

直接代入法的有效性建立在两点上：

1.选项是试题的组成部分，包含有效信息

很多数学运算试题相当于中小学数学的文字应用题，通常这些试题需要写出过程，而公职考试中的数学运算题全部为单项选择题，答案必定是四个选项中的一个，且是唯一的。这样，选项本身就包含了正确答案的信息，因此可以利用直接代入法排除，即是利用了选项的有效信息。

2.分析无从入手

对于很多考生来说，参加考试时距离中小学阶段已有不短的时间，对于数学运算的主要题型——文字应用题的分析，已经不够熟悉。与其耗时分析，不如直接代入验证。

Q3.WHERE—用在哪

直接代入法并非是万能的方法，对于试题设置为利用已知量计算和分析求解的试题和一些构造类的试题，代入排除法是无用的。代入排除法必须和未知量结合在一起。

1.试题情景设置繁琐

很多试题的设置条件是对于一个未知量进行各种计算或变换后满足一定的条件,然后求这个未知数。这种试题的设置形式方便了对选项的验算,使得代入排除法比列方程或分析能节省时间。如以下例题:

【例 1】一个三位数,其百位数是个位数的 2 倍,十位数等于百位数和个位数之和,那么这个三位数是多少?(　　)

A. 211　　B. 432

C. 693　　D. 824

【答案】C

【解析】直接代入选项进行验证,百位数是个位数的 2 倍,四个选项都符合;十位数等于百位数和个位数之和,只有 C 项符合。因此,本题答案为 C 选项。

【点拨】多位数问题,代入排除。

【例 2】某数加上 10,乘以 10,减去 10,除以 10,其结果等于 10,则这个数是(　　)。

A. 1　　B. 10

C. 11　　D. 9

【答案】A

【解析】某数加上 10,乘以 10,减去 10,除以 10,其结果等于 10,那么这个数是$(10\times10+10)\div10-10=1$。但实际上,如果直接代入选项,$[(1+10)\times10-10]\div10=10$,可以得出 A 项符合。因此,本题答案为 A 选项。

【点拨】答案信息完全,代入排除。

2.根据条件不方便分析

有些试题的设置条件对很多考生来说非常棘手,直接分析无从下手或比较难时,选择代入排除法。如以下例题:

【例 3】某个三位数的数值是其各位数字之和的 23 倍,这个三位数为(　　)。

A. 702　　B. 306

C. 207　　D. 203

【答案】C

【解析】依据题意，将四个选项逐一代入，发现只有207满足题意。因此，本题答案为C选项。

【点拨】结合选项发现，A、B、C三项的各位数字之和都是9，$9\times23=207$。

【例4】某单位组织员工去旅游，要求每辆汽车坐的人数相同，如果每辆车坐20人，还剩下2名员工；如果减少一辆汽车，员工正好可以平均分到每辆汽车。问该单位共有多少名员工？（　　）

A. 244　　B. 242

C. 220　　D. 224

【答案】B

【解析】本题考查和差倍比问题。如果减少一辆车，则要剩余$(20+2)$人，这22人可平均分配到各车，可知现在车的数量为11或22，则原来车的数量为12或23，结合选项，如果是23辆车则没有答案，故原来车的数量是12，可知总人数为$12\times20+2=242$（人）。因此，本题答案选B选项。

【点拨】代入排除，总人数末位数只能是2。

常用题型

多位数问题、余数问题、年龄问题、不定方程、复杂行程问题以及没有思路的试题等。

Q4.HOW—怎么用

代入排除技巧：居中代入；最值代入；结合数字特性、常识等代入。

（1）最值代入。若试题要求的是“至多/最大”时，代入选项应从最大的数开始代入；若试题要求的是“最少/最小”时，代入选项应从最小的数开始。

（2）居中代入。直接代入选项时，若选项中的数据为从小到大的均匀数字，一般选择大小居中的进行代入。若代入选项不正确，这时可以通过分析大小趋势进行排除。

(3)结合数字特性。结合数字特性代入，是指根据试题中的条件，确定答案数字所具有的某种数字特性，排除不符合该特性的选项，从而缩小答案的范围再代入验证。

下面通过例题来了解这些解题技巧：

【例 5】一批武警战士平均分成若干小组值勤。如果每 4 人一组，恰好余 1 人；如果每 5 人一组，恰好也余 1 人；如果每 6 人一组，恰好还是余 1 人。这批武警战士至少有(　　)人。

A. 121　　B. 101

C. 81　　D. 61

【答案】D

【解析】解法一：本题属于余数问题，对于余数问题，我们优先采用代入排除法。题目要求的是武警战士人数最少是多少，我们可以从最小的数开始代入，符合题意即为正确选项。代入 D 项 61，61 减去 1 之后是 4、5、6 的倍数，因此 61 符合题意。因此，本题答案选 D 选项。

解法二：本题属于余数问题中的同余问题。武警战士人数为 4、5、6 的最小公倍数的整数倍再加上 1，即 $60n+1$。最少为 $60\times1+1=61$(人)。因此，本题答案选 D 选项。

【点拨】代入排除，“总人数－1”能同时被 4、5、6 整除。

【例 6】甲、乙、丙、丁四个数的和为 43，甲数的 2 倍加 8，乙数的 3 倍，丙数的 4 倍，丁数的 5 倍减去 4，都相等。问这四个数各是多少？(　　)

A. 14　12　8　9　　B. 16　12　9　6

C. 11　10　8　14　　D. 14　12　9　8

【答案】D

【解析】代入排除。由乙数的 3 倍等于丙数的 4 倍可排除 A、C 两项，又由甲数的 2 倍加 8 等于乙数的 3 倍可排除 B 选项，所以只有 D 项满足条件。因此，本题答案为 D 选项。

【点拨】答案信息完全，考虑代入排除。从“乙数的 3 倍＝丙数的 4 倍”代入，先排除 A、C 两项，再代入 B 项或 D 项即可。

【例 7】装某种产品的盒子有大、小两种，大盒每盒能装 11 个，小盒每盒能装 8 个，要把 89 个产品

装入盒内,要求每个盒子都恰好装满,需要大、小盒子各多少个?(　　)

A. 3,7　　　　B. 4,6

C. 5,4　　　　D. 6,3

【答案】A

【解析】假设需要大盒子 x 个,小盒子 y 个,列方程得:$11x+8y=89$,为不定方程,代入选项只有3、7满足方程。因此,本题答案为A选项。

【点拨】不定方程,直接代入。

【例8】甲、乙各有钱若干元,甲拿出$\frac{1}{3}$给乙后,乙再拿出总数的$\frac{1}{5}$给甲,这时他们各有160元,问甲、乙原来各有多少钱?(　　)

A. 120元、200元　　　　B. 150元、170元

C. 180元、140元　　　　D. 210元、110元

【答案】C

【解析】解法一:方程法。设甲、乙原来各有的钱数为 x、y 元,根据题意可知:

$$\begin{cases}\frac{2}{3}x+\frac{1}{5}\times\left(y+\frac{1}{3}x\right)=160\\ \frac{4}{5}\times\left(y+\frac{1}{3}x\right)=160\end{cases},解得\begin{cases}x=180\\ y=140\end{cases}。$$

因此,本题答案为C选项。

解法二:代入排除法。代入A选项,第一次甲给了乙40元,乙现在有240元,拿出$\frac{1}{5}$后,剩余192元,排除;代入B选项,第一次甲给了乙50元,乙现在有220元,拿出$\frac{1}{5}$后,剩余176元,排除;代入C选项,第一次甲给了乙60元,乙现在有200元,拿出$\frac{1}{5}$后,剩余160元,所以C项满足题意。因此,本

题答案为 C 选项。

解法三：倒推法。最后一次，乙给甲$\frac{1}{5}$后剩余 160 元，所以乙之前有 $160\div\frac{4}{5}=200$（元），进而得出乙给甲的$\frac{1}{5}=40$ 元，所以第一次甲给了乙$\frac{1}{3}$后，甲剩余 $160-40=120$（元），所以最开始甲有钱 $120\div\frac{2}{3}=180$（元）。因此，本题答案为 C 选项。

【点拨】四个数字成等差数列排列，考虑居中代入，从中间的数字起开始代入。

【例 9】甲、乙两人计划从 A 地步行去 B 地，乙早上 7:00 出发，匀速步行前往，甲因事耽搁，9:00才出发。为了追上乙，甲决定跑步前进，跑步的速度是乙步行速度的 2.5 倍，但每跑半小时都需要休息半小时，那么甲什么时候才能追上乙？（　　）

A. 10:50　　B. 12:10　　C. 14:30　　D. 16:40

【答案】C

【解析】赋值法。设乙步行的速度为 12，则甲跑步的速度为 30，休息时速度为 0，代入选项，得到下表：

时刻	10:50	12:10	14:30	16:40
甲走过的路程	30	50	90	120
乙走过的路程	46	62	90	116

从表中可以看出，14:30 甲就可以追上乙。因此，本题答案为 C 选项。

【点拨】四个时间从小到大排列，考虑居中代入，优先考虑 B、C 两项中较为简单的 C 项进行代入。

【例 10】有一些信件，把它们平均分成三份后还剩 2 封，将其中两份三等分还多出 2 封，问这些信件至少有多少封？（　　）

A. 20　　B. 26　　C. 23　　D. 29

【答案】C

【解析】求至少有多少封，从最小项代起。先代入 A 项，20 封平均分成三份，每份 6 封还余 2 封，其中两份为 12 封刚好三等分。不符合题意，排除。再代入剩余项中最小的 C 项，23 封平均分成三份，每份 7 封余 2 封；其中两份为 14 封，平均分成三份，每份 4 封，还余 2 封，符合题意。

因此，本题正确答案为 C。

【点拨】题目问到“至少”或“至多”时，考虑最值代入，按照大小顺序代入。

【例 11】小明的妈妈买来一些糖果分给小明和弟弟，妈妈先给小明 1 块，再把剩下糖的 $\frac{1}{7}$ 给小明，然后给弟弟 2 块，又把剩下糖的 $\frac{1}{7}$ 给弟弟，这样两个人的糖果一样多，妈妈共买来多少块糖？（　　）

A. 34　　B. 43　　C. 36　　D. 63

【答案】C

【解析】题目中出现两个分数，结合数字特性，糖果的总数减去 1 应该是 7 的倍数，先排除 A、D 两项，再代入 B 项验证，错误，所以选择 C。

【点拨】一般情况下，代入排除法结合数字特性会起到近乎秒杀的效果。

【例 12】甲、乙两人卖数量相同的萝卜，甲打算卖 1 元 2 个，乙打算卖 1 元 3 个。如果甲、乙两人一起按 2 元 5 个的价格卖掉全部的萝卜，总收入会比预想的少 4 元钱。问两人共有多少个萝卜？（　　）

A. 420　　B. 120　　C. 360　　D. 240

【答案】D

【解析】解法一：设甲、乙两人各自拥有萝卜 x 个，则可得 $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}-2\times\frac{2}{5}x=4$，解得 $x=120$，所以甲、乙两人共有萝卜 $2x=240$（个）。因此，本题答案选择 D 项。

解法二：如果甲、乙两人各有一个萝卜收入会少 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-2\times\frac{2}{5}=\frac{1}{30}$（元），总收入少了 4 元，说明

甲、乙各自拥有的萝卜数为 $4\div\frac{1}{30}=120$(个),即两人共有萝卜 240 个。因此,本题答案选择 D 项。

【点拨】甲、乙共有的萝卜个数是甲、乙分别拥有的萝卜个数的 2 倍,刚好 D 项是 B 项的 2 倍,优先从 D 项代入。

【例 13】某市园林部门计划对市区内 30 处绿化带进行补栽,每处绿化带补栽方案可从甲、乙两种方案中任选其中一方案进行。甲方案补栽阔叶树 80 株,针叶树 40 株;乙方案补栽阔叶树 50 株,针叶树 90 株。现有阔叶树苗 2070 株,针叶树苗 1800 株,为最大限度利用这批树苗,甲、乙两种方案应各选(　　)。

A. 甲方案 19 个、乙方案 11 个　　B. 甲方案 20 个、乙方案 10 个

C. 甲方案 17 个、乙方案 13 个　　D. 甲方案 18 个、乙方案 12 个

【答案】D

【解析】选项信息非常充分,考虑代入排除法。B 项的数据最好计算,先代入 B 选项,需要阔叶树 $80\times20+50\times10=2100$(株),针叶树 $40\times20+90\times10=1700$(株),现有阔叶树苗不够用,排除。再代入 A 选项,需要阔叶树 2070 株、针叶树 1750 株,针叶树苗剩余 50 株。代入 C 项,需要阔叶树 2010 株、针叶树 1850 株,现有针叶树苗不够用。代入 D 项,需要阔叶树 2040 株、针叶树 1800 株,剩余 30 株。故应选择 D 选项。

EXERCISES—练习题

[**习题** 01] 有四个学生恰好一个比一个大一岁,他们的年龄相乘等于 93024,问其中最大的年龄是多少岁?(　　)

A. 16 岁　　B. 18 岁　　C. 19 岁　　D. 20 岁

[**习题** 02] 可以分解为三个质数相乘的最小的三位数是(　　)。

A. 100　　B. 102　　C. 104　　D. 105

[**习题** 03] 有三个连续的奇数,它们的平方和是四个相同数字组成的四位数,那么这三个连续奇

数之和是(　　)。

A. 117　　B. 123　　C. 129　　D. 135

[习题 04] 经技术改进,A、B 两城间列车的运行速度由 150 千米/小时提升到 250 千米/小时,行车时间因此缩短了 48 分钟,则 A、B 两城间的距离为(　　)。

A. 291 千米　　B. 300 千米　　C. 310 千米　　D. 320 千米

[习题 05] 小华 4 年后的年龄与小丽 4 年前的年龄相等,3 年后,她们两人的年龄和等于她们今年年龄差的 3 倍,小华和小丽今年的年龄分别是多少岁?(　　)

A. 10,18　　B. 4,12　　C. 5,13　　D. 6,14

[习题 06] 有 271 位游客欲乘大、小两种客车旅游,已知大客车有 37 个座位,小客车有 20 个座位。为保证每位游客均有座位,且车上没有空座位,则需要大客车的辆数是(　　)。

A. 1 辆　　B. 3 辆　　C. 2 辆　　D. 4 辆

[习题 07] 某自然数加 10 或减 10,都是完全平方数,则这个自然数是(　　)。

A. 25　　B. 26　　C. 28　　D. 29

参考答案及解析

1. C **【解析】**尾数法,可知四个人年龄不可能有尾数为 0 的,并且任意两人年龄乘积的尾数均不为 0,代入四个选项,只有 C 项符合题意。因此,本题选择 C 选项。

2. B **【解析】**代入排除法,将选项中的数字从小到大开始代入。$100=2\times2\times5\times5$,不满足题意,排除。$102=2\times3\times17$,符合题意。因此,本题选择 B 选项。

3. C **【解析】**代入 A 项,三个连续奇数为 37、39、41,平方和为 $37^2+39^2+41^2$,尾数为 1,而三个数的平方和明显大于 1111,A 项排除。B 项,三个连续奇数为 39、41、43,平方和为 $39^2+41^2+43^2$,尾数为 1,而这三个数的平方和也明显大于 1111,B 项排除。C 项,三个连续奇数为 41、43、45,平方和为 $41^2+43^2+45^2$,尾数为 5,三个数的平方和可能为 5555,验证可知,恰好满足。因此,本题选择 C 选项。

4. B **【解析】**之前列车的速度为 150 千米/小时,此时代入路程为 150 的倍数时,计算最简单。

先代入 B 项，路程为 300 千米时，之前的时间为 $300\div150=2$（小时），提速后需要的时间为 $300\div250=1.2$（小时），相差 0.8 小时，即 48 分钟，恰好符合。因此，本题选择 B 选项。

5. C 【解析】本题属于年龄问题，考虑代入排除法。小华 4 年后的年龄与小丽 4 年前的年龄相等，则两人的年龄差为 8 岁，四个选项都符合。3 年后，两人的年龄和等于她们今年年龄差的 3 倍，则 3 年后，两人的年龄和为 $8\times3=24$，四个选项中只有 C 项满足，因此，本题选择 C 选项。

6. B 【解析】设大客车的数量为 x，小客车的数量为 y，可得 $37x+20y=271$。$20y$ 的尾数一定为 0，则 $37x$ 的尾数一定为 1，代入选项只有 B 项才能满足。因此，本题选择 B 选项。

7. B 【解析】本题直接求解比较复杂，考虑代入排除法。A 项，35 和 15 都不是完全平方数，排除。B 项，16 和 36 都是完全平方数，满足题意。因此，本题选择 B 选项。

二、倍数特性法

Q1.WHAT—是什么

倍数特性法，是抓住试题中关于倍数关系的条件，通过排除法或者简化计算快速判断答案的方法。本质上倍数特性法也是一种代入法。

Q2.WHY—为什么

我们应用的倍数关系是指整数间的倍数关系。文字应用题中很多现实的数量，如人数、案件起数、邮票张数等。还有些不一定是整数的量，如质量、价格等，也可以默认为整数，如果选项都是整数，这说明待求量也一定是整数。倍数特性法的优点在于通过倍数等关系，不需要求解就能得到答案，为考试节省大量时间，因此倍数特性法是数学运算最快速的解题方法之一。

Q3.WHERE—用在哪

倍数特性法主要应用在显含和隐含倍数关系的试题中，隐含倍数关系包括因子倍数和比例倍数等形式。

1.直接倍数

试题中直接含有倍数关系，根据倍数关系的特性直接判断。如以下例题：

【例 1】一个四位数“□□□□”分别能被 15、12 和 10 除尽，且被这三个数除尽时所得三个商的和为 1365，问四位数“□□□□”中四个数字的和是多少？（　　）

A. 17　　B. 16

C. 15　　D. 14

【答案】C

【解析】这个四位数能被 15 整除，因此肯定是 3 的倍数，其各位数字相加也肯定是 3 的倍数，根据选项，选择 C。

【点拨】假设这个数为 x，则：$\frac{x}{15}+\frac{x}{12}+\frac{x}{10}=1365\Rightarrow x=5460$。

2.因子倍数

【例 2】某汽车厂商生产甲、乙、丙三种车型，其中乙型产量的 3 倍与丙型产量的 6 倍之和等于甲型产量的 4 倍，甲型产量与乙型产量的 2 倍之和等于丙型产量的 7 倍。则甲、乙、丙三型产量之比为（　　）。

A. 5∶4∶3　　B. 4∶3∶2

C. 4∶2∶1　　D. 3∶2∶1

【答案】D

【解析】根据第一个条件：3 乙＋6 丙＝4 甲，则甲必然有因子 3，答案选择 D。

3.比例倍数

【例 3】水果店运来一批石榴和苹果，其中苹果的重量占总重量的$\frac{9}{20}$，苹果比石榴少 200 千克，运来石榴（　　）千克。

A. 2000　　B. 1800　　C. 1100　　D. 900

【答案】C

【解析】如果总重量为 20 份，那么苹果是 9 份，石榴则应该是 11 份，答案应该有 11 因子，选择 C。

常用题型：

多位数问题、和差倍比问题等。

Q4.HOW—怎么用

掌握倍数特性法最关键的是牢记各种倍数关系的性质和判定方法，并通过做题熟悉命题人设置的倍数关系的形式。

2、4、8 整除及余数判定基本法则

1.一个数能被 2(或 5)整除，当且仅当其末一位数能被 2(或 5)整除；

2.一个数能被 4(或 25)整除，当且仅当其末两位数能被 4(或 25)整除；

3.一个数能被 8(或 125)整除，当且仅当其末三位数能被 8(或 125)整除。

4.一个数被 2(或 5)除得的余数，就是其末一位数被 2(或 5)除得的余数；

5.一个数被 4(或 25)除得的余数，就是其末两位数被 4(或 25)除得的余数；

6.一个数被 8(或 125)除得的余数，就是其末三位数被 8(或 125)除得的余数。

【示例】∵3752 的末两位数字“52”能被 4 整除　∴3752 能被 4 整除

【示例】∵2988 的末三位数字“988”不能被 8 整除　∴2988 不能被 8 整除

【示例】∵25198903 的末两位数字“03”除以“4”余 3　∴25198903 除以 4 余 3

【示例】∵198903 的末三位数字“903”除以“8”余 7　∴198903 除以 8 余 7

【示例】∵1975 的末两位数字“75”能被 25 整除　∴1975 能被 25 整除

【示例】∵25903 的末三位数字“903”除以“125”余 28　∴25903 除以 125 余 28

3、9 整除及余数判定基本法则

1.一个数能被 3 整除，当且仅当其各位数字和能被 3 整除；

2.一个数能被 9 整除，当且仅当其各位数字和能被 9 整除。

3.一个数被 3 除得的余数，就是其各位数字和被 3 除得的余数；

4.一个数被 9 除得的余数，就是其各位数字和被 9 除得的余数。

【示例】∵1941 各位数字之和“1＋9＋4＋1＝15”能被 3 整除　∴1941 能被 3 整除

【示例】∵1935 各位数字之和“1＋9＋3＋5＝18”能被 9 整除　∴1935 能被 9 整除

【示例】39130825198368 的各位数字之和为：3＋9＋1＋3＋0＋8＋2＋5＋1＋9＋8＋3＋6＋8＝66

∵66 不能被 9 整除　∴这个数字不能被 9 整除

∵66 除以 9 余 3　∴这个数字除以 9 余 3

7 整除判定基本法则

1.一个数是 7 的倍数，当且仅当其末一位的两倍，与剩下的数之差为 7 的倍数；

2.一个数是 7 的倍数，当且仅当其末三位数，与剩下的数之差为 7 的倍数。

【示例】∵362 末一位“2”的 2 倍与“36”之差“32”不能被 7 整除　∴362 不能被 7 整除

【示例】∵483 末一位“3”的 2 倍与“48”之差“42”能被 7 整除　∴483 能被 7 整除

【示例】∵12047 末三位“047”与“12”之差“35”能被 7 整除　∴12047 能被 7 整除

【示例】∵23015 末三位“015”与“23”之差“8”不能被 7 整除　∴23015 不能被 7 整除

11 整除判定基本法则

1.一个数是 11 的倍数，当且仅当其奇数位之和与偶数位之和的差值为 11 的倍数；

2.一个数是 11 的倍数，当且仅当其末三位数，与剩下的数之差为 11 的倍数。

【示例】∵7394 奇数位之和“7＋9＝16”与偶数位之和“3＋4＝7”的差值“16－7＝9”不是 11 的倍数　∴7394 不能被 11 整除

【示例】∵29381 奇数位之和“2＋3＋1＝6”与偶数位之和“9＋8＝17”的差值“17－6＝11”是 11 的倍数　∴29381 能被 11 整除

【示例】∵15235 末三位“235”与剩下的“15”之差“220”能被 11 整除　∴15235 能被 11 整除

13 整除判定基本法则

一个数是 13 的倍数，当且仅当其末三位数，与剩下的数之差为 13 的倍数。

【示例】∵181235 末三位“235”与“181”差“54”不能被 13 整除 ∴181235 不能被 13 整除

【示例】∵624546 末三位“546”与“624”差“78”能被 13 整除 ∴624546 能被 13 整除

● 核心提示：从上述表述中，我们发现 7、11、13 有一个相同的整除判断法则，就是判断其末三位数与剩下的数之差。这源自于以下经典分解：$1001=7\times11\times13$。

核心提示

若 $a:b=m:n$（m,n 互质），则说明 a 占 m 份，是 m 的倍数；b 占 n 份，是 n 的倍数；$a+b$ 占 $m+n$ 份，是 $m+n$ 的倍数；$a-b$ 占 $m-n$ 份，是 $m-n$ 的倍数。

下面通过例题来了解这些解题技巧：

【例 4】两个数的差是 2345，两数相除的商是 8，则这两个数之和是（　　）。

A. 2353　　B. 2896

C. 3015　　D. 3456

【答案】C

【解析】解法一：假设两数中较小的数是 x，则较大的数为 $8x$，根据题意有 $8x-x=2345$，解得 $x=335$，所以 $8x+x=3015$。因此，本题答案为 C 选项。

解法二：两数的差为奇数，则两数之和为奇数，排除 B、D 两项。两数相除的商为 8，则两数的和为 9 的倍数。因此，本题答案为 C 选项。

【点拨】两数的和为奇数，且是 9 的倍数。

【例 5】哥哥和弟弟各有若干本书，如果哥哥给弟弟 4 本，两人书一样多，如果弟弟给哥哥 2 本，哥哥的书是弟弟的 4 倍，哥哥和弟弟一共有（　　）本书。

A. 20　　B. 9

C. 17　　　　D. 28

【答案】A

【解析】由“如果弟弟给哥哥 2 本，哥哥的书是弟弟的 4 倍”可知，总数一定是 5 的倍数，排除 B、C、D 三项。因此，本题正确答案为 A。

【点拨】“哥哥的书是弟弟的 4 倍”，所以书的总数是 5 的倍数。

【例 6】某单位举办排球比赛，选男员工的$\frac{1}{11}$和 12 名女员工，剩余男员工是剩余女员工的 2 倍，总员工人数是 156 人，问：男员工有多少人？（　　）

A. 100　　　　B. 99

C. 111　　　　D. 121

【答案】B

【解析】解法一：选出男员工的$\frac{1}{11}$，可知男员工的数量为 11 的倍数，首先排除 A、C 两项，将 B 项代入，得知选出的男员工为 9 人，剩余 90 人（剩余男员工数量），又女员工数量为 $156-99=57$（人），选出 12 人，剩余 45 人（剩余女员工数量），$90\div45=2$，即：剩余男员工是剩余女员工的 2 倍，正好满足题意，直接锁定答案 B。

解法二：此题亦可用方程思想解答：设男员工数量为 x，则有$\left(1-\frac{1}{11}\right)x=2\times(156-x-12)$，解得 $x=99$，所以男员工数量为 99，因此，本题答案选择 B 选项。

【点拨】男员工的数量是 11 的倍数，排除 A、C 两项，代入 B 项验证正确。

【例 7】小红把平时节省下来的全部五分硬币先围成一个正三角形，正好用完，后来又改围成一个正方形，也正好用完。如果正方形的每条边比三角形的每条边少用 5 枚硬币，则小红所有五分硬币的总价值是（　　）。

A. 1 元　　　　B. 2 元

C. 3 元　　　　D. 4 元

【答案】C

【解析】解法一：设一共有 N 枚硬币，正方形每边用 M 枚硬币，则三角形每边用 $(M+5)$ 枚硬币。根据“方阵问题”基本公式可知：$\begin{cases}N=4M-4\\N=3\times(M+5)-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}N=60\\M=16\end{cases}$，即一共有 60 枚硬币，而每枚硬币为五分钱，所以总价值 3 元。因此，本题答案为 C 项。

解法二：因为所有的硬币可以围成一个正三角形，所以硬币的总数必然是 3 的倍数，那么硬币的总价值也应该是 3 的倍数。因此，本题答案为 C 选项。

【点拨】硬币总数是 3 的倍数，总价值也是 3 的倍数。

【例 8】某店一共进货 6 桶油，分别为 15、16、18、19、20、31 千克，上午卖 2 桶，下午卖 3 桶，下午卖的钱正好是上午的 2 倍，剩下的一桶油重几千克？(　　)

A. 15　　B. 16　　C. 18　　D. 20

【答案】D

【解析】由“下午卖的钱正好是上午的 2 倍”可得，上午和下午共同卖的 5 桶油的总价钱应为上午卖出价钱的 3 倍。6 桶油的总重量为 15+16+18+19+20+31=119(千克)，只有去掉 20 以后剩余 5 个数的和才能被 3 整除。因此，本题答案为 D 选项。

【例 9】有甲、乙、丙三辆公交车于上午 8:00 同时从公交总站出发，三辆车再次回到公交总站所用的时间分别为 40 分钟、25 分钟和 50 分钟。假设这三辆公交车中途不休息，请问它们下次同时到达公交总站将会是几点？(　　)

A. 11 点 20 分　　　　B. 11 点整

C. 11 点 40 分　　　　D. 12 点整

【答案】A

【解析】解法一：40 分钟、25 分钟、50 分钟的最小公倍数为 200 分钟。8:00 同时发车，则下次同时到达公交总站为 200 分钟后，合计 3 小时 20 分钟，即 11 点 20 分。因此，答案选择 A 选项。

解法二：将选项A代入，11点20分距8：00共200分钟。$200\div40=5$，$200\div25=8$，$200\div50=4$，三辆车均恰好返回公交总站，符合题意。因此，答案选择A选项。

【例10】两个派出所某月内共受理案件160起，其中甲派出所受理的案件中有17%是刑事案件，所以乙派出所受理的案件中有20%是刑事案件，问乙派出所在这个月中共受理多少起非刑事案件？（　　）

A. 48　　B. 60　　C. 72　　D. 96

【答案】A

【解析】分析题干可知，甲派出所受理的案件一定是100的倍数，即甲为100件，乙为60件，所以乙派出所受理的非刑事案件数为$60\times80\%=48$(件)。

【例11】某人共收集邮票若干张，其中$\frac{1}{4}$是2007年以前的国内发行的邮票，$\frac{1}{8}$是2008年国内发行的，$\frac{1}{19}$是2009年国内发行的，此外尚有不足100张的国外邮票。则该人共有（　　）张邮票。

A. 87　　B. 127　　C. 152　　D. 239

【答案】C

【解析】很明显，答案应该是4的倍数，选择C。

【例12】一块镍铝合金重500g，放于水中称减少质量32g，已知镍在水中减轻$\frac{1}{19}$，铝在水中减轻$\frac{1}{10}$，则这块合金中镍铝的质量分别是（　　）。

A. 380克；120克　　B. 360克；140克

C. 340克；160克　　D. 320克；180克

【答案】A

【解析】镍在水中减轻$\frac{1}{19}$，那么镍的质量应该是19的倍数，选择A。

【例 13】某单位招录了 10 名新员工，按其应聘成绩排名 1 到 10，并用 10 个连续的四位自然数依次作为他们的工号。凑巧的是每个人的工号都能被他们的成绩排名整除，问排名第三的员工工号所有数字之和可能是多少？(　　)

A. 9　　B. 12　　C. 15　　D. 18

【答案】B

【解析】第三名员工的工号，加上 6 之后，应该是第九名员工的工号，应该是 9 的倍数，所以第三名员工的工号各位数字之和，加上 6，也应该是 9 的倍数，因此选择 B。

【例 14】某公司三名销售人员 2011 年的销售业绩如下：甲的销售额是乙和丙销售额的 1.5 倍，甲和乙的销售额是丙的销售额的 5 倍，已知乙的销售额是 56 万元，则甲的销售额是(　　)。

A. 140 万元　　B. 144 万元　　C. 98 万元　　D. 112 万元

【答案】B

【解析】根据条件：甲＝1.5×(乙＋丙)，甲必须含有因子 3，结合选项，答案选 B。

【点拨】当题目涉及小数的时候，相乘并不一定可以保留原来的倍数关系。比如：5 的倍数乘以 0.4 之后，就很可能不再是 5 的倍数了。在涉及小数的乘法中，因子 2 或者因子 5，可能会在乘法中消失，但其他因子(譬如 3、7、9、11、13 等)都还会存在，可以作为我们因子判断的依据。

【例 15】某公司去年有员工 830 人，今年男员工人数比去年减少 6%，女员工人数比去年增加 5%，员工总数比去年增加 3 人，问今年男员工有多少人？(　　)

A. 329　　B. 350　　C. 371　　D. 504

【答案】A

【解析】今年男员工是去年的 1－6%＝94%，那么数字里面肯定有因子 47，选择 A。

【例 16】某电器城销售的某品牌 A 型号电视机，如果按销售价格打九折出售，可盈利 215 元，如果按 8 折出售要亏损 125 元，问电视机的进货价是多少？(　　)

A. 3400　　B. 3060　　C. 2845　　D. 2720

【答案】C

【解析】假设进价为 x，原销售价为 y，则列方程组：$\begin{cases}0.9y=x+215\\0.8y=x-125\end{cases}$

很明显，进货价 x 加上 215 之后一定有因子 9，215 除以 9 余 8，那么答案除以 9 一定余 1，选择 C。

【点拨】本题即使不列方程，也可以得到后面的结论，但实战当中列方程看得更加清楚，并且很多数字特性法也是在计算过程当中想到的。此外，在分析数字因子的时候，我们往往关注 3、7、9、11、13 等因子，而不要关注 2、4、5、8 等因子，除非你可以确定目标数字一定是整数。

【例 17】某超市用 2500 元购进一批鸡蛋，销售过程中损耗鸡蛋 10 千克。已知超市每千克鸡蛋的售价比进价高 1 元，全部售完后共赚 440 元，则共购进这批鸡蛋（　　）千克。

A. 460　　B. 500　　C. 590　　D. 610

【答案】B

【解析】假设购进了鸡蛋 n 千克，则：$\left(\frac{2500}{n}+1\right)(n-10)-2500=440$，很明显，$n$ 如果取 460、590、610 这样的数值，代入原方程将出现消不去的复杂因子。所以选择 B。

【例 18】甲、乙、丙三队共有 10 名选手参加围棋比赛。每名选手都与其余 9 名选手各赛一局，每局棋胜者得 1 分，负者得 0 分，平局各得 0.5 分。结果甲队选手平均得 4.5 分，乙队选手平均得 3.6 分，丙队选手平均得 9 分，甲队有（　　）名选手参赛。

A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 7

【答案】A

【解析】根据规则，每队的总分肯定是整数，或者"整数＋0.5"的形式，而乙队平均分为 3.6 分，说明其人数肯定有因子 5，才能保证其满足前面所述要求。总共才 10 人，说明乙队正好 5 人，那么甲队肯定不到 5 人，结合选项，选择 A。

【例 19】请问 1000！（1000 的阶乘）末尾一共有多少个连续的"0"？（　　）

A. 200　　B. 240　　C. 249　　D. 500

【答案】C

【解析】1000！末尾一共有多少个连续的“0”，取决于1000！一共有多少个因子10。而 $10=2\times5$，1000！当中因子2肯定会比因子5要多，那么1000！里有多少个因子5就决定了其末尾有多少个连续的“0”。我们知道，1000！是从1—1000这1000个数相乘，我们来分情况讨论：①1000÷625=1…375，说明1—1000里有1个 $625=5^4$ 的倍数；②1000÷125=8，说明1—1000里有8个 $125=5^3$ 的倍数；③1000÷25=40，说明1—1000里有40个 $25=5^2$ 的倍数；④1000÷5=200，说明1—1000里有200个 $5=5^1$ 的倍数。以上这些数的因子5统统加起来就是答案，在计算的时候注意重复的情形（前种情形都是包含在后种情形当中），那么总共的因子5应该有：$4\times1+3\times(8-1)+2\times(40-8)+1\times(200-40)=249$。

【点拨】本题可以直接这样计算：

$$\frac{1000}{5}+\frac{1000}{25}+\frac{1000}{125}+\frac{1000}{625}=200+40+8+1=249。$$

【例20】甲、乙两仓库存货吨数比为4∶3，如果由甲库中取出8吨放到乙库中，则甲、乙两仓库存货吨数比为4∶5。两仓库原存货总吨数是多少？（　　）

A. 94　　B. 87　　C. 76　　D. 63

【答案】D

【解析】甲、乙两仓库原存货之比为4∶3，总存货应该是7的倍数，选择D。

【例21】某公司为客户出售货物，收取3%的服务费；代客户购置设备，收取2%的服务费。某客户委托该公司出售自产的某种物品并代为购置新设备。已知公司共收取该客户服务费200元，客户收支恰好平衡，则自产的物品售价是多少元？（　　）

A. 3880　　B. 4080　　C. 3920　　D. 7960

【答案】B

【解析】假设该公司自产物、购置设备的价格分别为 x、y 元，根据“收支恰好平衡”：$(1-3\%)x=(1+2\%)y\Rightarrow x:y=102:97$，说明 x 是102的倍数，结合选项，选择B。

【例 22】有一个分数，分母加 2 等于$\frac{2}{5}$，分母减 3 等于$\frac{1}{2}$，这个分数分子和分母的和为（　　）。

A. 33　　B. 11　　C. 30　　D. 19

【答案】A

【解析】假设分子、分母分别为 x、y。根据“分母加 2 等于$\frac{2}{5}$”，如果 x 占 2 份，那么$(y+2)$占 5 份，说明 $x+y+2$ 应该占 7 份，因此分子、分母之和加上 2 应该是 7 的倍数，排除 B、C。同理，根据“分母减 3 等于$\frac{1}{2}$”可知分子、分母之和减去 3 应该是 3 的倍数，排除 D，选择 A。

【例 23】甲、乙两种商品的价格比是 3∶5，如果它们的价格分别下降 50 元，它们的价格比是 4∶7，这两种商品原来的价格各为（　　）。

A. 300 元，500 元　　B. 375 元，625 元

C. 450 元，750 元　　D. 525 元，875 元

【答案】C

【解析】下降 50 元后两者价格比为 4∶7，说明乙商品价格减 50 后是 7 的倍数，只有 C 项满足。

【例 24】饭店购进了三种蔬菜，其中白菜的重量占$\frac{2}{7}$，黄瓜的重量和其他两种蔬菜重量之和的比是 2∶3，黄瓜比白菜多 12 千克。共购进蔬菜（　　）千克。

A. 35　　B. 75　　C. 105　　D. 150

【答案】C

【解析】白菜占总重的$\frac{2}{7}$，说明总重是 7 的倍数；黄瓜∶其他＝2∶3，说明总重是 5 的倍数。于是我们假设总重为 35 份，那么白菜占 10 份，黄瓜占$\frac{2}{5}$即 14 份，黄瓜比白菜多 4 份，而实际上黄瓜比白菜多 12 千克，说明 1 份是 3 千克。所以蔬菜总共有 $3\times35=105$（千克）。

【例25】某城市有A、B、C、D四个区，B、C、D三区的面积之和是A的14倍，A、C、D三区的面积之和是B的9倍，A、B、D三区的面积之和是C区的2倍，则A、B、C三区的面积之和是D区的（　　）。

A. 1倍　　B. 1.5倍　　C. 2倍　　D. 3倍

【答案】A

【解析】如果A区占1份，那么B、C、D区占14份，说明A区占全城的$\frac{1}{15}$；如果B区占1份，那么A、C、D区占9份，说明B区占全城的$\frac{1}{10}$；如果C区占1份，那么A、B、D区占2份，说明C区占全城的$\frac{1}{3}$。综上，D区占全城的$1-\frac{1}{15}-\frac{1}{10}-\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$，说明$A$、$B$、$C$区面积之和是$D$区的1倍。

【例26】某影院有四个演播大厅，A厅可容纳人数占影院可容纳总人数的$\frac{4}{13}$，B厅的容量是A厅的$\frac{5}{6}$。C厅可容纳人数是A厅、B厅总和的$\frac{4}{11}$，D厅比C厅可多容纳40人。按照规定，一部影片最多只能在三个演播厅同时上映。问这个影院每次最多有多少观众能同时观看一部影片？（　　）

A. 1080　　B. 1200　　C. 1240　　D. 1560

【答案】C

【解析】不妨设四个演播大厅总人数有39份，则A厅有12份，B厅有10份，C厅有8份，因此D厅有9份，比C厅多1份，所以1份为40人，最多的三厅应该为A、B、D厅，共31份，其总人数为$31\times40=1240$（人），答案选C。

EXERCISES—练习题

[习题01] A、B、C三个桶中各装了一些水，现将A桶的$\frac{1}{3}$的水倒入B桶，再将B桶的$\frac{1}{5}$倒入C

桶，最后将 C 桶现有的 $\frac{1}{7}$ 倒入 A 桶，这时，三个桶中的水都是 12 升。问这三个桶中原有水各多少升？(　　)

A. 10，15，11　　B. 15，10，11　　C. 10，12，14　　D. 12，10，14

[习题 02] 甲、乙两人共有 260 本书，其中甲的书有 13%是专业书，乙的书有 12.5%是专业书，问甲有多少非专业书？(　　)

A. 75　　B. 87　　C. 174　　D. 67

[习题 03] 奥运期间，浙江某公交集团甲公司调用其公司 60 辆车的 $\frac{1}{6}$ 给北京某公交集团乙公司支持奥运，此时甲公司现有车辆仍比乙公司现有车辆的 $\frac{7}{8}$ 还多 8 辆，则乙公司原有(　　)辆车。

A. 38　　B. 42　　C. 48　　D. 52

[习题 04] 某车间加工一批零件，原计划每天加工 100 个，刚好如期完成。后改进技术，每天多加工 10 个，结果提前 2 天完成。这批零件有(　　)。

A. 1800 个　　B. 2000 个　　C. 2200 个　　D. 2600 个

[习题 05] 甲、乙两家商店购进同种商品，甲店进价比乙店便宜 10%。甲店按 20%的利润定价，乙店按 15%的利润定价，乙店定价比甲店高 28 元，则甲店进价是(　　)。

A. 320 元　　B. 360 元　　C. 370 元　　D. 400 元

[习题 06] 一块长方形菜地长与宽的比是 5∶3，如果长增加 2 米，宽减少 1 米，则面积增加 1 平方米，那么这块长方形菜地原来的面积是多少平方米？(　　)

A. 100　　B. 135　　C. 160　　D. 175

[习题 07] 一本书，小明已看了 130 页，剩下的准备 8 天看完。如果每天看的页数相等，3 天看的页数恰好是全书的 $\frac{5}{22}$，这本书共有(　　)页。

A. 324　　B. 330　　C. 429　　D. 457

[**习题** 08] 在一次测验中，甲答对 4 道题，乙答错题目占总数的 $\frac{1}{6}$，两人都答对的题目是总数的 $\frac{1}{4}$。那么乙答对了多少题？(　　)

A. 10　　B. 8　　C. 20　　D. 16

[**习题** 09] 2005 年父亲的岁数是儿子的岁数的 6 倍，2009 年父亲的岁数是儿子的岁数的 4 倍，则 2009 年父亲和儿子的岁数和是(　　)。

A. 28　　B. 36　　C. 46　　D. 50

[**习题** 10] 一个班级坐出租车出去游玩，出租车费用平均每人 40 元，如果增加 7 个人，平均每人 35 元，则这个班级一共花了(　　)元。

A. 1850　　B. 1900　　C. 1960　　D. 2000

[**习题** 11] 三个连续自然数的积是其和的 21 倍，则这三个数中最小的是(　　)。

A. 3　　B. 4　　C. 7　　D. 12

参考答案及解析

[**习题** 01] B　[**解析**] A 桶一开始应该是 3 的倍数，排除 A、C 两项；A 桶中的 $\frac{1}{3}$ 倒入 B 桶后，B 桶应该是 5 的倍数，排除 D 项。选择 B。

[**习题** 02] B　[**解析**] 甲的书中，专业书占 $13\%=\frac{13}{100}$；乙的书中，专业书占 $12.5\%=\frac{1}{8}$。因此，甲、乙的书的总数分别是 100、8 的倍数，甲可以是 100 或者 200。若甲有 200 本书，那么乙有 60 本书，不是 8 的倍数；所以甲有 100 本书，其中非专业书 $=100-100\times13\%=87$(本)。

[**习题** 03] A　[**解析**] 乙公司接受甲公司的 $60\times\frac{1}{6}=10$(辆)汽车后应该是 8 的倍数，只有 A 项

满足条件。

[习题 04] C　[解析] 改进技术后，每天加工 110 个，零件数应该是 11 的倍数，选择 C。

[习题 05] B　[解析] 甲店进价比乙店便宜 10%，那么甲店进价应该有因子 9，选择 B。

[习题 06] B　[解析] 长宽之比为 5∶3，宽有因子 3，则面积也应该有因子 3，选择 B。

[习题 07] B　[解析] 根据“3 天看的页数恰好是全书的 $\frac{5}{22}$”可知，全书页数一定是 22 的倍数，只有 B 项满足。

[习题 08] A　[解析] “乙答对题数∶总数 $=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$”，说明乙答对题数是 5 的倍数，排除 B、D 两项。乙若答对了 20 道，那么总数为 $20\div\frac{5}{6}=24$(道)，两人都答对 $24\times\frac{1}{4}=6$(道)，超过甲单独答对的题数，矛盾，排除 C 项，选择 A。

[习题 09] D　[解析] 2009 年父子年龄比为 4∶1，年龄和肯定是 5 的倍数，选择 D。

[习题 10] C　[解析] 增加 7 个人之后平均每人 35 元，所以总费用肯定是 35 的倍数，也就是 7 的倍数。

[习题 11] C　[解析] 这三个自然数的积是 21 的倍数，肯定包括因子 3 和 7，明显排除 A、B 两项。将 C 项代入，如果这三个数是 7、8、9，那么 $7\times8\times9\div(7+8+9)=21$，满足条件，选择 C。

三、化归为一法

Q1.WHAT—是什么

化归为一法是指将试题中某个中间量或总量设置为某个数值，从而计算待求比例关系或待求量的方法。也称为“设 1 法”或赋值法。

Q2.WHY—为什么

有些涉及比例关系的文字应用题，如果列方程求解，比例关系中的分数往往会给计算带来较多麻烦，而用化归为一法能有效地降低计算量，从而节省时间。

Q3.WHERE—用在哪

化归为一法主要应用在含有比例关系的试题中，比例关系出现的形式有分数、百分数、比例和倍数等。

1.分数

【例 1】某车间进行季度考核，整个车间平均分是 85 分，其中$\frac{2}{3}$的人得 80 分以上(含 80 分)，他们的平均分是 90 分，则低于 80 分的人的平均分是多少？(　　)

A. 68　　　　B. 70　　　　C. 75　　　　D. 78

【答案】C

【解析】解法一：由于$\frac{2}{3}$的人得 80 分以上(含 80 分)，则低于 80 分的人员占$\frac{1}{3}$，所以二者人数之比为 2∶1。设低于 80 分的人的平均分为 x，根据十字交叉法列式有：

$$\begin{array}{ccccc} \text{80 分以上:}90 & & & & 85-x \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & 85 & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ \text{低于 80 分:}x & & & & 5 \end{array}$$

所以$(85-x)∶5=2∶1$，解得 $x=75$(分)。因此，本题答案为 C 选项。

解法二：设整个车间有 3 人，则三人平均分为 85，其中 2 人的平均分为 90，且另一人得分低于 80，则低于 80 分的人的得分为 $85\times3-90\times2=75$，因此，本题答案为 C 选项。

【点拨】分数特征，考虑赋值法。设车间人数为 3 人。

2.百分数

【例 2】2010 年某种货物的进口价格是 15 元每公斤，2011 年该货物的进口量增加了一半，进口金额增加了 20%。问 2011 年该货物的进口价格是多少元每公斤？（　　）

A. 10　　B. 12　　C. 18　　D. 24

【答案】B

【解析】解法一：设 2011 年进口价格是 x，2010 年进口量是 n，由题意有 $\frac{x\times(1+0.5)n}{15\times n}=120\%$。解得 $x=12$(元/公斤)。因此，本题答案为 B 选项。

解法二：比例法。由题意可知，2010 年与 2011 年进口金额之比是 100%∶120%＝5∶6，而进口量之比是 2∶3，因此价格之比是 $\frac{5}{2}:\frac{6}{3}=5:4$。因此 2011 年的价格是 $15\div\frac{5}{4}=12$(元/公斤)。因此，本题答案为 B 选项。

解法三：赋值法。假设 2010 年进口了 2 公斤，2010 年进口金额是 30 元，则 2011 年进口了 3 公斤，进口金额是 $30\times(1+20\%)=36$(元)，因此 2011 年进口价格是 $36\div3=12$(元/公斤)。因此，本题答案为 B 选项。

【点拨】百分数，考虑赋值法。设 2010 年的进口量为 2。

3.比例

【例 3】某街道常住人口与外来人口之比为 1∶2，已知该街道下辖的甲、乙、丙三个社区人口比为 12∶8∶7。其中，甲社区常住人口与外来人口比为 1∶3，乙社区为 3∶5，则丙社区常住人口与外来人口比为（　　）。

A. 2∶3　　B. 1∶2　　C. 1∶3　　D. 3∶4

【答案】D

【解析】直接采用赋值法，设甲、乙、丙三个社区分别有 12、8、7 人，丙社区有常住人口 x 人，外来人口 y 人，则有：

	甲 12	乙 8	丙 7	总数 27
常住人口	3	3	x	9
外来人口	9	5	y	18

$x=3$，$y=4$，则其比例为 3∶4。因此，本题答案选择 D 选项。

【点拨】比例特征，考虑赋值法。设街道总人数为 $12+8+7=27$（人），则该街道常住人口数为 9 人，外来人口数为 18 人。

4.倍数

【例 4】一块试验田，以前这块地所种植的是普通水稻。现在将该试验田的$\frac{1}{3}$种上超级水稻，收割时发现该试验田水稻总产量是以前总产量的 1.5 倍。如果普通水稻的产量不变，则超级水稻的平均产量与普通水稻的平均产量之比是（　　）。

A. 5∶2　　B. 4∶3　　C. 3∶1　　D. 2∶1

【答案】A

【解析】解法一：由题意，设普通水稻的平均产量为 x，超级水稻的平均产量为 y，则有$\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y=1.5x$，解得 $y:x=5:2$。因此，本题答案选择 A 选项。

解法二：赋值法。根据题意，赋值原来普通水稻的总产量为 1，现在的总产量为 1.5，则现在剩余普通水稻的产量为$\frac{2}{3}$，种植的超级水稻的产量为 $1.5-\frac{2}{3}=\frac{5}{6}$，则若全部种植超级水稻的产量为$\frac{5}{6}\div\frac{1}{3}=\frac{5}{2}$，则超级水稻的平均产量与普通水稻的平均产量之比为$\frac{5}{2}:1=5:2$。因此，本题答案选择 A 选项。

【点拨】分数和倍数特征，考虑赋值法。也可设试验田共 3 份，普通水稻每份的产量为 1。

常用题型：

工程问题、行程问题、费用问题、溶液问题等。

Q4.HOW—怎么用

化归为一法的目的是简化计算，因此赋值要有一定的技巧。

1.化分数为整数

工程问题中经常出现某项工程某工程队可以多少天完成的条件，这些完成的天数就是总的工程量和工程队每天的工作量的比例关系，如果用占总工程量的几分之一的形式表示，计算会比较繁琐。因此我们将出现的天数的最小公倍数设为总工程量，这样每个工程队每天的工程量都是整数，方便了计算。

2.化百分数为整数

如果试题是关于一个未知量百分比的变化，可以简单的令这个量为100。为了简化计算，如果这个百分数和100有公约数，我们考虑除去公约数后的赋值。如出现20%，考虑设未知量为10。

下面通过例题来了解这些解题技巧：

【例5】小王步行的速度比跑步慢50%，跑步的速度比骑车慢50%。如果他骑车从A城去B城，再步行返回A城共需要2小时。问小王跑步从A城到B城需要多少分钟？（ ）

A. 45　　B. 48　　C. 56　　D. 60

【答案】B

【解析】解法一：假定步行的速度为1，则跑步和骑车的速度分别为2和4。若骑车从A城到B城的时间为t，则跑步和步行的时间分别为$2t$和$4t$，根据$t+4t=2$小时$=120$分钟，得到$t=24$分钟，则$2t=48$分钟。因此，答案选择B选项。

解法二：假定步行的速度为1，则跑步和骑车的速度分别为2和4。设A到B的距离为S，由$\frac{S}{1}+$

$\frac{S}{4}$＝2 小时＝120 分钟，得到 $S=96$，则跑步需要的时间＝$\frac{S}{2}$＝48 分钟。因此，答案选择 B 选项。

解法三：步行、跑步、骑车的速度之比为 1∶2∶4，则从 A 城到 B 城所需时间之比为 4∶2∶1，根据题意，步行和骑车为 5 份的时间，共计 120 分钟，每份为 24 分钟，跑步从 A 城去 B 城的时间为 2 份，共计 48 分钟。因此，答案选择 B 选项。

解法四：设步行、跑步和骑车的速度分别为 1、2 和 4，步行和骑车的平均速度＝$\frac{2\times1\times4}{1+4}$＝1.6，则路程 $S=1.6\times1$，跑步需要的时间＝$\frac{1.6\times1}{2}$＝0.8 小时＝48 分钟。因此，答案选择 B 选项。

【点拨】按照比例进行赋值。设小王步行的速度为 1，则跑步的速度为 2，骑车的速度为 4。

【例 6】某地区居民用同样多的人民币只能买到原来 80％的商品，这意味着商品价格（　　）。

A. 上涨了 20％　　B. 下降了 20％

C. 上涨了 25％　　D. 下降了 25％

【答案】C

【解析】设有 100 元人民币，假设原来能买 10 件商品，则现在只能购买 8 件，说明商品价格由原来的 10 元/件，增长为 12.5 元/件，所以上涨了 25％。

【例 7】一满杯纯牛奶，喝去 20％后用水加满，再喝去 60％。此时杯中的纯牛奶占杯子容积的百分数为（　　）。

A. 52％　　B. 48％　　C. 42％　　D. 32％

【答案】D

【解析】我们假设容器容量为 100，那么最开始有 100 的牛奶，由于喝掉了 20，所以还剩下 80 牛奶。加水后又喝掉 60％，只剩下 40％，所以还剩牛奶 80×40％＝32，占原来的 32％，选择 D。

【例 8】某网店以高于进价 10％的定价销售 T 恤，在售出 $\frac{2}{3}$ 后，以定价的 8 折将余下的 T 恤全部

售出，该网店预计盈利为成本的（　　）。

A. 3.2%　　B. 不赚也不亏　　C. 1.6%　　D. 2.7%

【答案】D

【解析】假设进价为10，则利润为1，定价为11，假设销量为3，则可得最终的收入为2×11＋11×0.8＝30.8。总成本为30，所以最终的利润率为0.8÷30≈2.7%，答案选D。

【例9】某服装店老板去采购一批商品，其所带的钱如果只买某种进口上衣可买120件，如果只买某种普通上衣则可买180件。现在知道，最后该老板买的进口上衣和普通上衣的数量相同，问他最多可以各买多少件？（　　）

A. 70件　　B. 72件　　C. 74件　　D. 75件

【答案】B

【解析】假设带了360元，那么进口上衣和普通上衣价格分别是3元、2元，那么可以各买360÷(3＋2)＝72(件)。

【例10】有一辆自行车，前轮和后轮都是新的，并且可以互换，轮胎在前轮位置可以行驶5000千米，在后轮位置可以行驶3000千米，问使用两个新轮胎，这辆自行车最多可以行多少千米？（　　）

A. 4250　　B. 3000　　C. 4000　　D. 3750

【答案】D

【解析】我们假设新轮胎的“可消耗量”为15000，那么前轮每千米消耗15000÷5000＝3，后轮每千米消耗15000÷3000＝5，两个轮胎每千米一共消耗3＋5＝8，而两个轮胎总共有可消耗量为15000×2＝30000，说明最多可以走30000÷8＝3750(千米)，选择D。

【例11】某市气象局观测发现，今年第一、二季度本市降水量分别比去年同期增加了11%和9%，而两个季度降水量的绝对增量刚好相同。那么今年上半年该市降水量同比增长多少？（　　）

A. 9.5%　　B. 10%　　C. 9.9%　　D. 10.5%

【答案】C

【解析】假设今年一、二季度降水量的绝对增量均为99，那么去年一、二季度降水量应该分别是：

$99\div11\%=900$，$99\div9\%=1100$，所以上半年同比增长$99\times2\div(900+1100)\times100\%=9.9\%$，选择C。

【例12】一只装有动力桨的船，其单靠人工划船顺流而下的速度是水速的3倍。现该船靠人工划动从A地顺流到达B地，原路返回时只开足动力桨行驶，用时比来时少$\frac{2}{5}$。问船在静水中开足动力桨行驶的速度是人工划船速度的多少倍？（　　）

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

【答案】B

【解析】假设水速为1，那么人工划船顺流速度就是3，从而得到人工划船静水速度为2。再假设从A到B用时为5，那么返回时用时为3。从A到B的距离为$5\times3=15$，从B到A的动力桨逆水速度为$15\div3=5$，所以动力桨静水速度为$5+1=6$。综上，静水中动力桨的速度是人工划船速度的$6\div2=3$倍。

【例13】某调查队男、女队员的人数比是3∶2，分别为甲、乙、丙三个调查小组。已知甲、乙、丙三组的人数比是10∶8∶7，甲组中男、女队员的人数比是3∶1，乙组中男、女队员的人数比是5∶3，则丙组中男、女队员的人数比是（　　）。

A. 4∶9　　B. 5∶9　　C. 4∶7　　D. 5∶7

【答案】B

【解析】设甲、乙、丙三组的人数分别为20人、16人、14人，那么总共是50人，再根据男女比例可知：男队员总数为30人，女队员总数为20人。很容易得到甲组中男队员15人，女队员5人；乙组中男队员10人，女队员6人。所以，丙组中男队员5人，女队员9人，答案选B。

【例14】甲从A地到B地需要30分钟，乙从B地到A地需要45分钟，甲、乙两人同时从A、B两地相向而行，中间甲休息了20分钟，乙也休息了一段时间，最后两人在出发40分钟后相遇。问乙休息了多少分钟？（　　）

A. 15　　B. 18　　C. 20　　D. 25

【答案】D

【解析】假设 A 地到 B 地的距离为 90 公里，则甲速＝3 公里/分钟，乙速＝2 公里/分钟，相遇时甲实际走了 40－20＝20(分钟)，所走路程为 3×20＝60(公里)，所以乙走了剩下的 30 公里。因此乙走路的实际时间为：30÷2＝15(分钟)，因此乙休息了 40－15＝25(分钟)。选择 D。

【例 15】甲、乙两人早上 10 点同时出发匀速向对方的工作单位行进，10 点 30 分两人相遇并继续以原速度前行。10 点 54 分甲到达乙的工作单位后，立刻原速返回自己单位。问甲返回自己单位时，乙已经到了甲的工作单位多长时间？(　　)

A. 42 分　　B. 40 分 30 秒　　C. 43 分 30 秒　　D. 45 分

【答案】B

【解析】假设两地相距 54 米，甲用 54 分钟走完全程，所以：甲速＝1 米/分。甲、乙用 30 分钟相遇，所以两人速度和为：54÷30＝1.8(米/分)，所以乙速为 0.8 米/分。因此，乙到达甲单位的时间为 54÷0.8＝67.5(分钟)，甲自出发至返回自己单位需要时间为 2×54＝108(分钟)，此时乙已经到达甲公司 108－67.5＝40.5(分钟)，选择 B。

【例 16】某旅行社对学生团体旅游提出如下优惠方案：每人享受八二折(即原价的 82％)优惠，且如果人数多于 5 人，则有 1 人可全部免费，但不得分成多个旅游团。现有一个 9 名学生的旅游团参加该旅行社组织的旅游团组，则人均费用大约优惠了(　　)。

A. 25.1％　　B. 26.2％　　C. 27.1％　　D. 28.6％

【答案】C

【解析】假设每个人的团费是 100 元，在没有优惠的情况下，9 名学生共需要花费 900 元。由于其人数超过了 5 人，有 1 人可全部免费，其余人享受八二折，共需要花费：8×100×0.82＝656(元)。共节约了 900－656＝244(元)，平均到 9 个人身上，每个人大约优惠了 244÷9≈27.1(元)。人均费用大约优惠了 27.1％，故正确答案为 C 选项。

【例 17】商店销售某种商品，在售出总进货数的一半后将剩余的打八折出售，销售掉剩余的一半后在现价基础上再打五折出售，全部售出后计算毛利润为采购成本的 60％。问如果不打折出售所有的商品，毛利润为采购成本的多少？(　　)

A. 45%　　B. 60%　　C. 90%　　D. 100%

【答案】D

【解析】假设原有货物量为 4，三次分别售出 2、1、1 的量。再设原价为 10，三次售出价分别为 10、8、4。因此，总共得到收入 $2\times10+1\times8+1\times4=32$，那么采购成本为 $32\div(1+60\%)=20$。如果不打折可得利润为 $4\times10-20=20$，为采购成本的 100%。

【例 18】一艘游轮从甲港口顺水航行至乙港口需 7 小时，从乙港口逆水航行至甲港口需 9 小时。问如果在静水条件下，游轮从甲港口航行至乙港口需多少小时？(　　)

A. 7.75 小时　　B. 7.875 小时　　C. 8 小时　　D. 8.25 小时

【答案】B

【解析】假设两港距离为 63，那么顺水、逆水速度分别为 9 和 7，游轮在静水中的速度应该是两者的平均数，为 8，那么静水条件下，游轮航行需要 $63\div8=7.875$(小时)。

【例 19】某公司年终分红，董事会决定拿出公司当年利润的 10%奖励甲、乙、丙三位高管，原本打算依据职位高低按甲乙丙比例为 3∶2∶1 的方案进行分配，最终董事会决定根据实际贡献按甲乙丙比例为 4∶3∶2 分配奖金。最终方案中(　　)得到的奖金比原有方案有所提高。

A. 甲　　B. 乙　　C. 丙　　D. 不清楚

【答案】C

【解析】假设奖金总量为 18 元，那么按照原方案甲、乙、丙三人拿到的分别为 9、6、3 元，如果按照最终方案，三人拿到的分别为 8、6、4 元，很明显，丙得到的奖金比原有方案有所提高。

【例 20】一些羽毛球分给甲、乙、丙、丁四个组训练，平均每人正好分到 25 个。若只分给甲组，平均每人可分到 125 个；若只分给乙组，平均每人分到 100 个；若只分给丙组，平均每人分到 75 个，那么人数最多的是哪个组？(　　)

A. 甲组　　B. 乙组　　C. 丙组　　D. 丁组

【答案】C

【解析】假设羽毛球一共有 1500 个，四个组共有 $1500\div25=60$(人)，甲组有 $1500\div125=12$(人)，乙

组有 1500÷100＝15(人),丙组有 1500÷75＝20(人),那么丁组有 60－12－15－20＝13(人),最多的是丙组。

EXERCISES—练习题

[习题 01] 受原材料价格上涨的影响,某产品的总成本比之前上涨了$\frac{1}{15}$,而原材料成本在总成本中的比重提高了 2.5 个百分点。问原材料的价格上涨了多少?(　　)

A. $\frac{1}{9}$　　B. $\frac{1}{10}$　　C. $\frac{1}{11}$　　D. $\frac{1}{12}$

[习题 02] 有一本畅销书,今年每册书的成本比去年增加了 10%,因此每册书的利润下降了 20%,但是今年的销量比去年增加了 70%,则今年销售该畅销书的总利润比去年增加了(　　)。

A. 36%　　B. 25%　　C. 20%　　D. 15%

[习题 03] 小红去买过冬的蔬菜,她带的钱可以买 10 斤萝卜或 50 斤白菜,如果小红买了 6 斤萝卜,剩下的钱全用来买白菜,可以买几斤白菜?(　　)

A. 12 斤　　B. 15 斤　　C. 20 斤　　D. 24 斤

[习题 04] 市场上买 2 斤榴莲的价钱可以买 6 斤苹果,买 6 斤橙子的价钱可以买 3 斤榴莲。买苹果、橙子、菠萝各 1 斤的价钱可以买 1 斤榴莲。买 1 斤榴莲的价钱可以买菠萝(　　)。

A. 2 斤　　B. 3 斤　　C. 5 斤　　D. 6 斤

[习题 05] 2010 年末,某公司高收入员工(占 20%)收入是一般员工(占 80%)的 6 倍,未来 5 年实现员工总收入增加 1 倍,同时缩小收入差距,当一般员工收入增加 1.5 倍时,则高收入员工收入是一般员工的多少倍?(　　)

A. 3　　B. 4　　C. 4.5　　D. 5

[习题 06] 一商品的进价比上月低了 5%,但超市按上月售价销售,其利润率提高了 6 个百分点,则超市上月销售该商品的利润率为(　　)。

A. 12%　　B. 13%　　C. 14%　　D. 15%

参考答案及解析

[习题01] A　[解析] 假设原来总成本为15，现在上涨了1，涨到了16。这里上涨的“1”是由于原材料上涨引起的，可假设原材料从x上涨到$x+1$，则：$\frac{x+1}{16}-\frac{x}{15}=2.5\%\Rightarrow x=9$，所以原材料上涨了$\frac{1}{9}$。

[习题02] A　[解析] 假设去年每册书利润为100，销量也为100，那么去年的总利润为10000；今年每册书的利润应该为80，销量为170，那么今年的总利润为13600，增长36%。

[习题03] C　[解析] 假设小红带了100元，易知萝卜10元/斤，白菜2元/斤。小红买了6斤萝卜花了60元，剩下40元还可以买20斤白菜。

[习题04] D　[解析] 假设苹果1元1斤，那么易知榴莲3元1斤，橙子1.5元1斤。因此，1斤榴莲比1斤苹果和1斤橙子之和贵0.5元，那么菠萝就是0.5元1斤，得到1斤榴莲的价钱可以买菠萝6斤。

[习题05] B　[解析] 假设公司总人数为10人，则2人为高收入员工，8人为一般员工。再假设现在一般员工每人的收入为1，那么高收入员工每人的收入为6，现在的总收入为$8\times1+2\times6=20$。未来5年总收入增加1倍，达到40，其中，一般员工增加1.5倍，达到2.5，总收入为$8\times2.5\times1=20$；高收入员工总收入为$40-20=20$，每个人为$20\div2=10$，是一般员工的$10\div2.5=4$倍。

[习题06] C　[解析] 假设上月进价为100，那么这个月进价为95，假设售价为x，则：

$\frac{x-95}{95}-\frac{x-100}{100}=6\%\Rightarrow x=114\Rightarrow$该商品利润率$=\frac{114-100}{100}=14\%$。

四、比例假设法

Q1. WHAT—是什么

比例假设法是指将试题中的已知量用比例关系中的数值代替从而简化计算的方法。这种方法和化归为一法同样是赋值，不同的地方在于，化归为一法是设未知量，比例假设法是设已知量。

Q2. WHY—为什么

有些考生可能会有疑问，既然试题中已经给出了具体的数值，为什么还要将其赋值为另一数值？实际上这个赋值，是赋的“份数”。而这个量与份数的比值，在做倍数和加减运算(运算的对象必须相同，即量和量之间，份数和份数之间)是不变的，这就是数学上的线性不变性。赋值的份数往往是个位数或者十位数，这样可以显著地降低计算量，节省时间；还可以使得量化关系更加清晰，便于思考分析。

Q3. WHERE—用在哪

比例假设法是关于将有具体数值的量赋值的方法。类似划归为一法，主要应用在有分数、百分数、倍数等比例关系的试题中。

【例 1】某商店以每件 6 元的进价买回商品，再以每件 8.4 元卖出。当卖了 $\frac{3}{4}$ 时，不仅收回了购买所付的款项，还获利 90 元，问商品一共有多少件？（　　）

A. 300　　B. 400

C. 500　　D. 600

【答案】A

【解析】本题出现分数和具体钱数，适用赋份数法。由 $\frac{3}{4}$ 可赋值总数为 4 份，则卖了 3 份，所以总

进价为 $6\times4=24$，此时的售价总数为 $8.4\times3=25.2$，共获利：$25.2-24=1.2$。实际获利 90 元，则商品一共有 $\frac{90}{1.2}\times4=300$(件)。故本题答案为 A。

【例 2】某城市共有 A、B、C、D、E 五个区，A 区人口是全市人口的 $\frac{5}{17}$，B 区人口是 A 区人口的 $\frac{2}{5}$，C 区人口是 D 区和 E 区人口总数的 $\frac{5}{8}$，A 区比 C 区多 3 万人。全市共有多少万人？（　　）

A. 20.4　　　　B. 30.6

C. 34.5　　　　D. 44.2

【答案】D

【解析】赋份数法。由题干中的分数可以假设全市人口为 17 份，那么 A 区 5 份，B 区 2 份，C 区＋D 区＋E 区＝10 份，C 区＝$\frac{5}{8}$(D 区＋E 区)＝$\frac{5}{13}$(C 区＋D 区＋E 区)＝$\frac{50}{13}$份，A 区－C 区＝$\frac{15}{13}$份，进而可以得到 1 份是 $\frac{13}{5}$万人，所以全市人口为 $17\times\frac{13}{5}=44.2$(万人)。故本题答案为 D。

【回顾知识点】若 $a=\frac{m}{n}b$(m，n 互质)，则 $a=\frac{m}{m+n}(a+b)$。

【例 3】同时打开游泳池的 A、B 两个进水管，加满水需 1 小时 30 分钟，且 A 管比 B 管多进水 180 立方米。若单独打开 A 管，加满水需 2 小时 40 分钟。则 B 管每分钟进水多少立方米？（　　）

A. 6　　　　B. 7

C. 8　　　　D. 9

【答案】B

【解析】赋份数法。由题干中的 90 分钟、160 分钟可以假设总水量为 $9\times10\times16$ 份，那么效率为 A＋B＝16 份，A＝9 份，所以 B＝7 份，答案一定是 7 的倍数。故本题答案为 B。

【例 4】甲地到乙地，步行速度比骑车速度慢 75%，骑车速度比公交慢 50%。如果一个人坐公交车

从甲地到乙地，再从乙地步行到甲地，一共用了一个半小时，则该人骑车从甲地到乙地需要多长时间？（　　）

A. 10 分钟　　B. 20 分钟

C. 30 分钟　　D. 40 分钟

【答案】B

【解析】根据题意可知，步行、骑车、公交的速度比为 1∶4∶8，走相同路程的时间比为 8∶2∶1。根据题意，(1＋8)份的时间共计 90 分钟，即 1 份时间为 10 分钟则骑车从甲地去乙地的时间为 2 份，共计 20 分钟。故本题答案为 B。

常用题型：

工程问题、行程问题、费用问题、溶液问题、和差倍比问题等。

Q4.HOW—怎么用

比例假设法的原则是尽量简化为互质的整数关系，假设的量应该尽可能小，方便计算。

【例 5】某公司有三个部门，第一个部门的人数是其他两个部门人数的三分之一，第二个部门的人数是其他两个部门人数的五分之一，第三个部门有 28 人，则第一个部门与第二个部门的人数相差多少？（　　）

A. 4　　B. 6　　C. 8　　D. 5

【答案】A

【解析】假设公司有 12 人，那么第一个部门应有 3 人，第二个部门有 2 人，得到第三个部门应该是 12－3－2＝7(人)，实际上第三个部门是 28 人，所以实际值应该是假设值的 4 倍。第一、二个部门分别是 3×4＝12(人)，2×4＝8(人)，相差 4 人。

【例 6】一本书有 100 多页，小王每天看固定的页数，看了 18 天后，发现未看的页数正好是已看页

数的$\frac{2}{3}$，又看了 7 天后发现未看的页数正好比已看的页数少 100 页。问这本书共有多少页？（　　）

A. 180　　B. 160　　C. 150　　D. 120

【答案】C

【解析】假设小王每天看 1 页，那么 18 天一共看了 18 页，而未看的页数正好是已看的$\frac{2}{3}$，所以未看的页数应该是 $18\times\frac{2}{3}=12$（页），总共是 $18+12=30$（页）。又看了 7 天后，总共看了 $18+7=25$（页），未看 $12-7=5$（页），未看的页数比已看的页数少 $25-5=20$（页），而实际上这个差是 100 页，所以实际值应该是假设值的 5 倍，所以总共有 $5\times30=150$（页）。

【例 7】某高速公路收费站对过往车辆的收费标准是：大型车 30 元/辆、中型车 15 元/辆、小型车 10 元/辆。某天，通过收费站的大型车与中型车的数量比是 5∶6，中型车与小型车的数量比是 4∶11，小型车的通行费总数比大型车的多 270 元，这天的收费总额是（　　）。

A. 7280 元　　B. 7290 元　　C. 7300 元　　D. 7350 元

【答案】B

【解析】假设中型车数量为 12 辆，那么易得大型车应该是 10 辆，小型车应该是 33 辆。大、中、小三种车型的总通行费分别为：$10\times30=300$（元），$12\times15=180$（元），$33\times10=330$（元），总共为 810 元。小型车的通行费总数比大型车多 $330-300=30$（元），而实际上这个差是 270 元，所以实际值应该是假设值的 9 倍，所以收费总额为 $810\times9=7290$（元）。

【例 8】某企业为员工定制工作服，请服装公司的裁缝量体裁衣，裁缝每小时为 52 名男员工、35 名女员工量体。几小时后，刚好量完所有的女员工的尺寸，这时还有 24 名男员工没有量体。若男女员工的比例为 11∶7，则该企业共有多少名员工？（　　）

A. 720　　B. 810　　C. 900　　D. 1080

【答案】A

【解析】男女员工的比例为11∶7＝55∶35,假设企业有男员工55人,女员工35人,则当量完所有女员工尺寸时,男员工剩余3人没有量体,实际上是24人没有量体,所以实际值是假设值的8倍。该企业共有员工8×(55＋35)＝720(人)。

【例9】国家为了继续刺激消费,规定私人购买耐用消费品的,不超过其价格的50％的款项可以用抵押的方式向银行贷款,蒋老师欲购买一辆家用轿车,他现在的全部积蓄为P元,只够支付车款的60％,则蒋老师应向银行贷款(　　)元。

A. $\frac{P}{2}$　　B. $\frac{2P}{3}$　　C. $\frac{P}{4}$　　D. $\frac{3P}{4}$

【答案】B

【解析】假设车款为10元,他的积蓄只有6元,需要贷款4元,贷款是积蓄的$\frac{2}{3}$,所以选择B。

【例10】商场销售某种商品的加价幅度为其进货价的40％,现商场决定将加价幅度降低一半来促销,商品售价比以前降低了54元。问该商品原来的售价是多少元?(　　)

A. 324　　B. 270　　C. 135　　D. 378

【答案】D

【解析】假设进价为10元,那么原来售价为14元,新的售价为12元,降低了2元。实际上降低了54元,说明实际值是假设值的27倍,那么原来售价应该是14×27＝378(元),选择D。

【例11】在澳大利亚热带森林有一对袋鼠兄弟,它们在进行跳远比赛,袋鼠弟弟说:应该让我先跳10次,你才能跳。假如在同样的时间内,袋鼠弟弟每跳4次,袋鼠哥哥只能跳3次,而哥哥跳5次的距离相当于弟弟跳7次那样远,那么这样下去,袋鼠哥哥要在跳多少次后才能追上袋鼠弟弟呢?(　　)

A. 60　　B. 90　　C. 120　　D. 150

【答案】D

【解析】我们以选项中最小的数值为例,直接假设哥哥跳了60次后追上弟弟,根据题意,哥哥跳60次,同时弟弟应该可以跳80次,并且哥哥跳这60次的距离应该相当于弟弟跳84次,所以弟弟必须提前

跳84－80＝4(次)。而原题是提前跳10次,所以实际值应该是假设值的2.5倍,60×2.5＝150(次),选择D。

【例12】甲从A地去B地,每小时速度为35千米;乙从B地去A地,速度是每小时15千米;两人相向而行,第三次和第四次迎面相遇点距离是100千米,问A、B两地距离是多少?(　　)

A. 50　　B. 100　　C. 150　　D. 250

【答案】D

【解析】根据最小选项,我们先假设总距离为50千米。两人的速度和为50千米/时,第三、四次(迎面)相遇共走了5、7个全程,即250千米、350千米,分别需要250÷50＝5(小时)、350÷50＝7(小时),那么甲分别走了5×35＝175(千米)、7×35＝245(千米),分别是3个全程＋25千米、4个全程＋45千米,简单画个图可知,这两个点差20千米。根据题干可知,实际上是相差100千米,所以应该是假设的5倍,A、B两地相距50×5＝250(千米)。

【例13】A城市每立方米水的水费是B城市的1.25倍,同样交水费20元,在B城市比在A城市可多用2立方米水,那么A城市每立方米水的水费是(　　)元。

A. 2　　B. 2.5　　C. 3　　D. 3.5

【答案】B

【解析】假设A、B两城市每立方米的水费分别为5元、4元,那么交水费20元在A、B两城市分别可以使用4和5立方米水,只相差1立方米,而题目相差2立方米,即实际值是假设值的一半。即分别是2.5元/立方米、2元/立方米,选择B。

【点拨】使用"比例假设法"本质上必须要求下面两个量之间有比例关系:①假设量;②矛盾量。本题中假设量是水价,矛盾量是用水量,这两者之间是反比例而不是正比例关系,所以最后计算比例的时候跟其他题目是一个相反的形式。当然,如果假设量和矛盾量之间没有比例关系,这种方法是不可以使用的。

【例14】甲、乙两辆清洁车执行东、西城间的公路清扫任务。甲车单独清扫需要6小时,乙车单独清扫需要9小时,两车同时从东、西城相向开出,相遇时甲车比乙车多清扫15千米。问东、西两城相距

多少千米？（　　）

A. 60 千米　　B. 75 千米　　C. 90 千米　　D. 135 千米

【答案】B

【解析】假设两城相距 18 千米，甲速度为 $18\div6=3$（千米/时），乙速度为 $18\div9=2$（千米/时），相遇时间为 $18\div(2+3)=3.6$（小时），两车分别走了 10.8 千米、7.2 千米，相差 3.6 千米。而实际甲车比乙车多清扫了 15 千米，是假设值的 $15\div3.6=\frac{25}{6}$ 倍，说明两城相距 $18\times\frac{25}{6}=75$（千米），选择 B。

【例 15】小李乘公共汽车去某地，车行过一半路程时，小李把座位让给一位老人后一直站着，离终点还剩 3 千米时，他又坐下，在这次乘车过程中，他站的路程是坐着的路程的三分之一，则小李这次乘车的全程为（　　）。

A. 8 千米　　B. 9 千米　　C. 12 千米　　D. 14 千米

【答案】C

【解析】因为小李站的路程是坐着的路程的 $\frac{1}{3}$，说明全程的 $\frac{1}{4}$ 他是站着的，$\frac{3}{4}$ 是坐着的。如果全程总共 4 千米，那么小李应该坐了 3 千米，车行一半路程已经坐了 2 千米，那么需要离终点还剩 1 千米时重新坐下，而实际值是 3 千米，是假设值的 3 倍，说明全程应该是 $4\times3=12$（千米）。

【例 16】一个产品生产线分为 a、b、c 三段，每个人每小时分别完成 10、5、6 件，现在总人数为 71 人，要使得完成的件数最大，71 人的安排分别是（　　）。

A. 14∶28∶29　　B. 15∶31∶25　　C. 16∶32∶23　　D. 17∶33∶21

【答案】B

【解析】如果要完成 30 件产品，三个生产线恰好分别需要 3、6、5 个人，这样总数是 14 人。而实际人数为 71 人，我们知道 70 是 14 的 5 倍，所以如果安排 70 个人，三个生产线应该分别安排 3、6、5 的 5 倍，即 15、30、25 个人，剩下 1 个人安排在哪里都无所谓了，选择 B。

【例 17】一个水塘里放养了鱼和鳖。鳖的数量占二者总数量的$\frac{5}{11}$，现在又放进了 130 条鱼，这时鳖的数量占二者总数量的$\frac{7}{18}$。这个水塘里一共有(　　)只鳖。

A. 350　　B. 358　　C. 377　　D. 384

【答案】A

[解一] 假设水塘里一共有 35 只鳖，那么一开始总量为 $35\div\frac{5}{11}=77$，后来的总量为 $35\div\frac{7}{18}=90$，二者差了 13，而实际上差了 130，是假设值的 10 倍，所以鳖一共有 350 只，选择 A。

[解二] 很明显，鳖的数量是 5 和 7 的倍数，结合选项，只有 A 满足要求。

【例 18】某晚会计划设置抽奖环节，能用于购买奖品的总金额固定，且要求每名一等奖奖品的金额是二等奖的两倍，每名二等奖奖品的金额是三等奖的两倍。如果一、二、三等奖各设置两名，则一等奖奖品金额为每名 720 元。若一等奖设一名、二等奖两名、三等奖四名，则一等奖的奖品金额为(　　)元。

A. 780　　B. 840　　C. 880　　D. 940

【答案】B

【解析】原来 6 个人的奖金金额的比例为 4∶4∶2∶2∶1∶1，一等奖奖金为 4 份 720 元，所以每份应该是 180 元。总金额为 14 份，所以总金额应该为 180×14 元。调整之后 7 个人比例为 4∶2∶2∶1∶1∶1∶1，总共 12 份，那么每份应该为 180×14÷12＝210(元)，所以一等奖金额占 4 份，应该是 840 元，选择 B。

【点拨】本题解析虽然跟“比例假设法”的形式不太一样，使用的是“比例份数”的概念，但本质上是相通的，是一种更为简捷的变体。

【例 19】报社将一定的奖金发给征文活动获奖者，其中一等奖是二等奖的 2 倍，二等奖金是三等奖的 1.5 倍，如果一、二、三等奖各评选两人，那么一等奖获得者将得 2400 元奖金；如果一等奖只评选

一人，二、三等奖各评选两人，那么一等奖的奖金是(　　)。

A. 2800 元　　B. 3000 元　　C. 3300 元　　D. 4500 元

【答案】C

【解析】易知一、二、三等奖奖金的比例为 6∶3∶2，调整之后相当于撤销了一个一等奖，把这个人的 2400 元奖金按照比例分给了剩下 5 个人，这 5 个人的比例为 6∶3∶3∶2∶2，总共是 16 份，所以每份是2400÷16＝150(元)，一等奖补拿 6 份，即 900 元，从 2400 元变成 3300 元，选择 C。

EXERCISES—练习题

[习题 01] 某公司因前年产品销量较好，去年年初将产品提价 20%，但因价格上升，去年的销量下降 20%，该公司去年的营业额为 9600 万元，则该公司前年的营业额是(　　)元。

A. 1 亿　　B. 9812 万　　C. 1000 万　　D. 9600 万

[习题 02] 甲、乙、丙、丁、戊合做一批零件。甲做的个数是其他四个人工作总量的一半，乙做的个数是其他四个人工作总量的$\frac{1}{3}$，丙做的个数是其他四个人工作总量的$\frac{1}{4}$，丁做的个数是其他四个人工作总量的$\frac{1}{5}$，戊做了 120 个。五个人共做了(　　)个。

A. 480　　B. 960　　C. 1200　　D. 2400

[习题 03] 甲、乙有数量相同的萝卜，甲打算卖 1 元 2 个，乙打算卖 1 元 3 个，如甲、乙二人一起按 2 元 5 个卖全部的萝卜，总收入会比预想的少 4 元，问两人共有多少个萝卜？(　　)

A. 420　　B. 120　　C. 360　　D. 240

[习题 04] 某商品定价为进价的 1.5 倍，售价为定价的 8 折，每件商品获利 24 元，该商品定价为(　　)元。

A. 180　　B. 160　　C. 144　　D. 123

[**习题** 05] 某公司女职员占总人数的 $\frac{2}{5}$，后来新进 10 名女职员，这时女职员和男职员人数相等，则公司现在共有职员(　　)名。

A. 100　　B. 80　　C. 60　　D. 50

参考答案及解析

[**习题** 01] A　[**解析**] 假设前年销量为 100，价格为 100 元，那么去年销量为 80，价格为 120 元，得到营业额为 9600 元。实际值是假设值的 1 万倍，所以前年的营业额应该是 $10000\times100\times100=1$(亿元)，选择 A。

[**习题** 02] D　[**解析**] 假设零件总量是 60 个，那么易知甲、乙、丙、丁分别为 20、15、12、10，剩下戊就应该是 $60-20-15-12-10=3$(个)，而实际上戊做了 120 个，所以实际值应该是假设值的 40 倍，五人总共做了 $60\times40=2400$(个)。

[**习题** 03] D　[**解析**] 假设甲、乙分别有 30 个萝卜，甲单独可卖 15 元，乙单独可卖 10 元，两人一起可以卖 24 元，少 1 元，实际值是假设值的 4 倍，共有 $(30+30)\times4=240$(个)。

[**习题** 04] A　[**解析**] 假设进价为 2 元，定价为 3 元，售价 8 折就应该是 2.4 元，则每件商品获利 0.4 元。实际获利 24 元，所以实际值是假设值的 60 倍，即进价 120 元，定价 180 元，选择 A。

[**习题** 05] C　[**解析**] 假设原来公司有 5 人，其中女职员为 2 人，那么男职员为 3 人，如果新进 1 名女职员，男女就相等了。但原题给的是 10 名，所以实际值应该是假设值的 10 倍，即公司原有 $5\times10=50$(名)职员。现有 $50+10=60$(名)职员。

五、十字交叉法

Q1.WHAT—是什么

十字交叉法是通过整体的平均值和部分的值，求出部分之间比例的方法。对求解部分之间比例关系的试题，有近乎“秒杀”的效果。同时十字交叉法也是资料分析中一种重要的方法。

Q2.WHY—为什么

十字交叉法实际上就是将比例关系的特殊形式转化为经验公式，省去分析的过程，节省了时间。因为十字交叉法可以清楚地了解整体的平均值和部分的值的大小关系，所以某些题目可以不通过计算，即可以判断答案。

Q3.WHERE—用在哪

十字交叉法一般用于存在整体和部分关系的试题中，而比例关系是解题的关键。

【例 1】一只松鼠采松子，晴天每天采 24 个，雨天每天采 16 个，它一连几天共采 168 个松子，平均每天采 21 个，这几天当中晴天有几天？（　　）

A. 3　　　　B. 4

C. 5　　　　D. 6

【答案】C

【解析】十字交叉法：

24　　　5

　　21　　$\frac{晴天}{雨天}=\frac{5}{3}$，可知晴天天数是 5 的倍数。故本题答案为 C。

16　　　3

【例 2】某单位共有 A、B、C 三个部门，三部门人员平均年龄分别为 38 岁、24 岁、42 岁。A 和 B 两部门人员平均年龄为 30 岁，B 和 C 两部门人员平均年龄为 34 岁。该单位全体人员的平均年龄为多少岁？（　　）

A. 34　　　　B. 36

C. 35　　　　D. 37

【答案】C

【解析】对 A、B 两部门运用“十字交叉法”得其人数比例为 3∶4，对 B、C 两部门运用“十字交叉法”得其人数比例为 4∶5。根据比例赋值 A、B、C 三部门分别有 3、4、5 人，故该单位全体人员的平均年龄为 $\frac{38\times3+24\times4+42\times5}{3+4+5}=35$(岁)。故本题答案为 C。

【例 3】某公司 2011 年前三季度营业收入 7650 万元，比上年同期增长 2%，其中主营业务收入比上年同期减少 2%，而其他业务收入比上年同期增加 10%，那么，该公司 2011 年前三季度主营业务收入为多少？(　　)

A. 3920 万元　　B. 4410 万元

C. 4900 万元　　D. 5490 万元

【答案】C

【解析】设该公司 2010 年前三季度主营业务收入为 x 万元，运用十字交叉法：

$$\begin{array}{ccc} -2\% & & 8\% \\ & 2\% & \\ 10\% & & 4\% \end{array}$$

$\frac{8\%}{4\%}=2:1$，则 $x=\frac{7650}{1+2\%}\times\frac{2}{3}=5000$(万元)，所以 2011 年前三季度主营业务收入为 $5000\times98\%=4900$(万元)。故本题答案为 C。

【易错点拨】注意涉及增长率、折扣的十字交叉法，求得的是基期量、折前的量之比。

【例 4】小张去机票代理处为单位团购机票 10 张，商务舱定价 1200 元/张，经济舱定价 700 元/张。由于买的数量较多，代理商就给予优惠，商务舱按定价的 9 折付钱，经济舱按定价的 6 折付钱，如果他付的钱比按定价少 31%，那么小张一共购买的经济舱的票数是(　　)。

A. 7 张　　B. 6 张

C. 9 张　　D. 8 张

【答案】D

【解析】9 折即所付钱数是定价的 90%；6 折即所付钱数是定价的 60%；比定价少 31% 即所付钱数

是定价的 69%。运用十字交叉法，注意交叉出的两者之比是折扣前的钱数之比而非票数之比。

$$\begin{array}{lccc} \text{商务舱折前总价} & 90\% & & 9\% \\ & & 69\% & \\ \text{经济舱折前总价} & 60\% & & 21\% \end{array}\qquad \frac{\text{商务舱折前总价}}{\text{经济舱折前总价}}=\frac{9}{21}=\frac{3}{7}。$$

而两者单张价格之比是 12∶7，所以两者张数之比是 $\frac{3}{7}\div\frac{12}{7}=1:4$，机票总数为 10 张，那么经济舱是 8 张。故本题答案为 D。

常用题型：

平均数问题、溶液问题、和差倍比问题等。

Q4.HOW—怎么用

“十字交叉法”实际上是一种简化方程的形式，凡是符合下图左边方程的形式，都可以用右边的“十字交叉”的形式来简化：

$$Aa+Bb=(A+B)r\Rightarrow\frac{A}{B}=\frac{r-b}{a-r}\Rightarrow \begin{array}{lccc} A: & a & & r-b \\ & & r & \\ B: & b & & a-r \end{array} \Rightarrow \frac{A}{B}=\frac{r-b}{a-r}$$

【例 1】某单位共有员工 25 人，他们的平均年龄为 28 岁，其中男员工的平均年龄为 30 岁，女员工的平均年龄为 25 岁，问男员工比女员工的人数多多少？（　　）

A. 2 人　　B. 3 人　　C. 4 人　　D. 5 人

【答案】D

【解析】“十字交叉法”：

$$\begin{array}{lccc} \text{男员工} & 30 & & 3 \\ & & 28 & \\ \text{女员工} & 25 & & 2 \end{array}$$

则男女员工人数之比为 3∶2，易得分别为 15、10 人，男员工比女员工多 5 人。

【例 2】车间共有 40 人，某次技术操作考核平均成绩为 80 分，其中男工平均成绩为 86 分，女工平均成绩为 78 分，该车间有女工多少人？（　　）

A. 16　　B. 24　　C. 25　　D. 30

【答案】D

【解析】“十字交叉法”：

$$\begin{array}{lccc} \text{男工} & 86 & & 2 \\ & & 80 & \\ \text{女工} & 78 & & 6 \end{array}$$

$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}=\frac{10}{30}$，由于总数为 40 人，所以男、女工分别为 10 人和 30 人。

【例 3】某养鸡场计划购买甲、乙两种小鸡苗共 2000 只进行饲养，已知甲种小鸡苗每只 2 元，乙种小鸡苗每只 3 元。相关资料表明：甲、乙两种小鸡苗的成活率分别为 94%和 99%。若要使这批小鸡苗的成活率不低于 96%，且买小鸡苗的总费用最小，则应选购甲、乙两种小鸡苗各（　　）。

A. 500 只、1500 只　　B. 800 只、1200 只

C. 1100 只、900 只　　D. 1200 只、800 只

【答案】D

【解析】因为希望总费用尽可能小，那么尽可能使用便宜的甲种小鸡苗；但甲种小鸡苗成活率较低，所以使用的比例最好保证两种小鸡苗的总体成活率恰好为 96%。对成活率进行“十字交叉法”：

$$\begin{array}{lccc} \text{甲种小鸡苗} & 94\% & & 3\% \\ & & 96\% & \\ \text{乙种小鸡苗} & 99\% & & 2\% \end{array}$$

甲种小鸡苗与乙种小鸡苗的比例为 3∶2，结合选项，选择 D。

【例 4】小张到文具店采购办公用品，买了红、黑两种笔共 66 支。红笔的定价为 5 元，黑笔的定价为 9 元，由于买的数量较多，商店给予优惠，红笔打八五折，黑笔打八折，最后支付的金额比核定价少 18%，那么他买了红笔（　　）。

A. 36 支　　B. 34 支　　C. 32 支　　D. 30 支

【答案】A

【解析】设小张购买红笔 x 支，黑笔 y 支，则：本题可以用“十字交叉法”，但算出的比例不是两种笔的“支数比例”，而是“总价比例”。因此为避免错误，仍建议大家使用方程，但解方程时应将第二个方程中 x、y 分置两边，作如下变换：$0.85\times5x-0.82\times5x=0.82\times9y-0.8\times9y\Rightarrow\frac{x}{y}=\frac{0.18}{0.15}=\frac{36}{30}$，于是看出 x 与 y 分别为 36、30。这其实算另一种相对“保险”的十字交叉法。大家也可以按照下面的形式做“十字交叉”：

$$\begin{array}{llcl} \text{红笔总价 } 5x & 0.85 & & 0.02 \\ & & 0.82 & \\ \text{黑笔总价 } 9y & 0.80 & & 0.03 \end{array}$$

$5x:9y=2:3\Rightarrow x:y=6:5=36:30$，所以红笔是 36 支。

【例 5】小华去市场买草莓和苹果，一共买了 15 斤，已知草莓 12 元/斤，苹果10 元/斤，由于买的数量较多，商家就给予优惠，草莓按照定价 95%付钱，苹果按照定价 86%付钱，如果小华付的钱比按定价少付了 10%，那么他买了多少斤草莓？（　　）

A. 4　　B. 6　　C. 9　　D. 10

【答案】B

【解析】设共买草莓 x 斤，苹果 y 斤，运用“十字交叉法”：

$$\begin{array}{llcl} \text{草莓总价 } 12x & 0.95 & & 0.04 \\ & & 0.90 & \\ \text{苹果总价 } 10y & 0.86 & & 0.05 \end{array}$$

$12x:10y=4:5\Rightarrow x:y=2:3=6:9$，所以草莓是 6 斤。

【例 6】红酒桶中有浓度为 68%的酒，绿酒桶中有浓度为 48%的酒，若每个酒桶中取若干酒混合后，酒浓度为 52%。若每个酒桶中取酒的数量比原来都多 12 升，混合后的酒浓度为 53.2%。第一次混合时，红酒桶中取的酒是（　　）。

A. 17.8 升　　B. 19.2 升　　C. 22.4 升　　D. 36.8 升

【答案】B

[解一] 运用“十字交叉法”，易知第一次混合比应该为 1∶4，所以假设第一次分别取 x、$4x$ 升；再用“十字交叉法”得到第二次混合比为 13∶37，所以 $(x+12)∶(4x+12)=13∶37$，得 $x=19.2$，选择 B。

[解二] 运用“十字交叉法”：

$$\begin{array}{lccccc} \text{红} & 68\% & & 4\% & & \\ & & 52\% & & =\dfrac{1}{4} & \\ \text{绿} & 48\% & & 16\% & & \end{array} \qquad \begin{array}{lccccc} \text{第一次混合后} & 52\% & & 4.8\% & & \\ & & 53.2\% & & =\dfrac{4}{1} & \\ 24\text{ 升} & 58\% & & 1.2\% & & \end{array}$$

第一次混合时，红、绿两酒桶所取酒的体积比为 1∶4；第二次两桶都多取 12 升，相当于把第一次取出的酒与 24 升浓度为 $(68\%+48\%)\div2=58\%$ 的酒混合，由“十字交叉法”得到的体积比为 4∶1，因此，第一次总共取酒 $4\times24=96$（升），其中从红酒桶中取的酒为 $96\times\dfrac{1}{5}=19.2$（升）。

EXERCISES—练习题

[习题 01] 某班一次数学测试，全班平均 91 分，其中男生平均 88 分，女生平均 93 分，则女生人数是男生人数的多少倍？（　　）

A. 0.5　　B. 1　　C. 1.5　　D. 2

[习题 02] 某超市购进西瓜 1000 个，运输途中碰裂一些，未碰裂的西瓜卖完后，利润率为 40%，碰裂的西瓜只能降价出售，亏本 60%，最后结算时总的利润率为 32%，则碰裂了多少西瓜？（　　）

A. 80　　B. 75　　C. 85　　D. 78

参考答案及解析

[习题 01] C　[解析] 运用"十字交叉法"可知女生人数与男生人数的比例为 3∶2，女生人数是男生人数的 1.5 倍。

[习题 02] A　[解析] 运用"十字交叉法"可知未碰裂的西瓜数与碰裂的西瓜数比例为 92∶8，故碰裂了 80 个西瓜。

六、极端思维法

Q1.WHAT—是什么

极端思维法是分析时构造满足题设条件的最极端的情形，从而求出满足题设条件的极端情形的方法，这是我们日常生活、学习和工作中普遍运用的思维方法。

Q2.WHY—为什么

极端思维法本质上就是一类求最值问题的试题的要求，是命题者需要考查的分析能力。

Q3.WHERE—用在哪

极端思维一般用在试题中出现了"至多""至少""最大""最小""最快""最慢""最高""最低"等字样的情形。因为需要构造，所以极端思维也是一种"构造设定法"。

【例 1】 将 25 台笔记本电脑奖励给不同的单位，每个单位奖励的电脑数量均不等，最多可以奖励几个单位？（　　）

A. 5　　　B. 6　　　C. 7　　　D. 8

【答案】 B

【解析】 奖励单位最多，即每个单位获得的奖励尽量的少，可设分别分得 1、2、3…n 台电脑。当 $n=6$ 时，总数至少为 21 台；当 $n=7$ 时，总数至少为 28 台，故最多可分给 6 个单位，答案选 B。

【例2】一学生在期末考试中6门课成绩的平均分为92.5分，且6门课的成绩是互不相同的整数，最高分是99分，最低分是76分，则按分数从高到低居第三的那门课至少得分为(　　)分。

A. 93　　B. 95　　C. 96　　D. 97

【答案】B

【解析】设第三高科目的分数为 x 分，则这六科分别不会超过99、98、x、$(x-1)$、$(x-2)$、76，那么总和不会超过 $99+98+x+(x-1)+(x-2)+76=270+3x$，即 $92.5\times6\leqslant270+3x$，所以 $x\geqslant95$，选择B。

【例3】某单位2011年招聘了65名毕业生，拟分配到该单位的7个不同部门。假设行政部门分得的毕业生人数比其他部门都多，问行政部门分得的毕业生人数至少为多少名？(　　)

A. 10　　B. 11　　C. 12　　D. 13

【答案】B

【解析】假设行政部门分到毕业生 x 名，那么其他6个部门不会超过 $6\times(x-1)$ 名毕业生，那么总数不会超过 $x+6(x-1)=7x-6$，即 $65\leqslant7x-6$，所以 $x\geqslant\frac{71}{7}=10.143$，所以最少是11名，选择B。

常用题型：

最值问题等。

Q4.HOW—怎么用

极端思维的核心原则是构造最不利情形。抽屉原理：把 $(mn-1)$ 个物体放入 n 个抽屉中，其中必有一个抽屉中至多有 $(m-1)$ 个物体。

【例4】甲、乙、丙、丁共进行了5项比赛，每项第一名得3分，第二名得2分，第三名得1分，第四名不得分。已知甲队获得了3次第一名，乙队获得了3次第二名，那么得分最少的队的分数不可能超过(　　)分。

A. 5　　B. 6　　C. 7　　D. 8

【答案】C

【解析】得分最少的队得分尽可能多，则要求其他队得分尽可能少。五场比赛的总分为 $5\times(3+2+1+0)=30$(分)，甲队至少得了 $3\times3=9$(分)，那么乙、丙、丁队最多得 21 分，所以分数最少的队最多得 7 分，选择 C。

【例 5】有 120 名职工投票从甲、乙、丙三人中选举一人为劳模，每人只能投一次，且只能选一个人，得票最多的人当选。统计票数的过程中发现，在前 81 张票中，甲得 21 票，乙得 25 票，丙得 35 票。在余下的选票中，丙至少再得几张选票就一定能当选？(　　)

A. 15　　B. 18　　C. 21　　D. 31

【答案】A

[解一] 我们假设丙至少要再得 N 票。剩余 $120-21-25-35=39$(张)选票，要保证丙一定当选，我们假设除了丙的 N 票，全部 $(39-N)$ 票都被乙得到，那么 $35+N>25+39-N\Rightarrow N>14.5$，故 N 至少需要是 15，选择 A。

[解二] 乙是丙最大的竞争对手，除了甲得到的 21 票外，还有 $120-21=99$(票)，丙需要得到这其中的过半数才能保证当选，即 50 票。而他已经得到了 35 票，还需要 15 票，选择 A。

【例 6】某部门从甲、乙、丙三人中选出一名优秀员工，共有 52 人投票。在计票过程中的某时刻，甲得了 17 票，乙得了 16 票，丙得了 11 票。如果规定得票数比其他两人都多的候选人才能当选，那么甲要确保当选，最少要再得多少张票？(　　)

A. 2 张　　B. 3 张　　C. 4 张　　D. 5 张

【答案】C

【解析】乙是甲最大的竞争对手，除了丙得到的 11 票外，还有 $52-11=41$(票)，甲需要得到这其中的过半数才能保证当选，即 21 票。而他已经得到了 17 票，还需要 4 票，选择 C。

【例 7】要把 21 棵桃树栽到街心公园里 5 处面积不同的草坪上，如果要求每块草坪必须有树且所栽棵数要依据面积大小各不相同，面积最大的草坪上至少要栽几棵？(　　)

A. 7　　B. 8　　C. 10　　D. 11

【答案】A

[解一]要想最大的草坪栽得最少，那么5个数需要尽可能的平均。5个数的平均数为$21\div5=4.2$，所以2.2、3.2、4.2、5.2、6.2这5个数相加正好等于21，最大的数字是6.2，这是最大的草坪的最低理论可能值，实际值不可能低于6.2，取整数就只能是7，选择A。

[解二]假设最大的草坪栽了N棵树，要让这个数尽可能的少，其他草坪就要尽可能的多。而第二、三、四、五名草坪分别不可能超过$N-1$、$N-2$、$N-3$、$N-4$，所以五个草坪总和不可能超过$5N-10$，即$21\leqslant5N-10\Rightarrow N\geqslant6.2$，说明$N$最小只能是7，选择A。

【例8】一个班里有30名学生，有12人会跳拉丁舞，有8人会跳肚皮舞，有10人会跳芭蕾舞。问至多有几人会跳两种舞蹈？(　　)

A. 12人　　B. 14人　　C. 15人　　D. 16人

【答案】C

【解析】一共会跳舞的人次为$12+8+10=30$(人次)，总共最多可以分配给$30\div2=15$(人)，让每人会两种舞蹈，选择C。

【例9】10个箱子总重100公斤，且重量排在前三位的箱子总重不超过重量排在后三位的箱子总重的1.5倍。问最重的箱子重量最多是多少公斤？(　　)

A. $\frac{200}{11}$　　B. $\frac{500}{23}$　　C. 20　　D. 25

【答案】B

【解析】假设最轻的箱子重量为A，要让最重的箱子(假设重量为N)尽可能的重，其余的箱子最好尽量轻，所以我们构造其他8个箱子都是跟最轻的箱子一样重，即都是A。那么：$N+A+A=1.5\times3A$，得到$N=2.5A$，即$A=0.4N$。因此$100=N+0.4N\times9$，得到$N=\frac{100}{4.6}=\frac{500}{23}$(公斤)。

【例10】为增强职工的锻炼意识，某单位举行了踢毽子比赛，比赛时长为1分钟。参加比赛的职

工平均每人踢了76个，已知每人至少踢了70个，并且其中一人踢了88个，如果不把该职工计算在内，那么平均每人踢了74个。则踢得最快的职工最多踢了多少个？（　　）

A. 88　　B. 90　　C. 92　　D. 94

【答案】D

【解析】设共有职工 N 人，根据总数目相等可知：$76N=74(N-1)+88 \Rightarrow N=7$。要使踢得最快的职工尽可能踢得多，就要构造其他人尽可能少，除了最快的职工还有踢了88个的职工，我们设定剩下5名职工都只踢了70个，这样踢得最快的职工应该是 $74\times6-70\times5=94$（个），选择D。

【例11】某城市9月平均气温为28.5度，如当月最热日和最冷日的平均气温相差不超过10度，则该月平均气温在30度及以上的日子最多有多少天？（　　）

A. 24　　B. 25　　C. 26　　D. 27

【答案】B

【解析】9月份共30天，假设有 N 天达到或超过了30度，那么剩下 $(30-N)$ 天肯定也达到或超过了20度，即 $28.5\times30\geqslant30\times N+20\times(30-N) \Rightarrow N\leqslant25.5$，最多为25天。

【例12】某社团共有46人，其中35人爱好戏剧，30人爱好体育，38人爱好写作，40人爱好收藏，这个社团至少有（　　）人以上四项活动都喜欢。

A. 5　　B. 6　　C. 7　　D. 8

【答案】A

【解析】不爱好这四项活动的分别有11、16、8、6人，共 $11+16+8+6=41$（人次），分配给不同的人以保证四项活动都喜欢的人尽量的少，那么至少还有 $46-41=5$（人）。

EXERCISES—练习题

［习题01］有一排长椅总共有65个座位，其中已经有些座位上有人就座。现在又有一人准备找一个位置就座，但是此人发现，无论怎么选择座位，都会与已经就座的人相邻。问原来至少已经有多少人就座？（　　）

A. 13　　B. 17　　C. 22　　D. 33

[**习题** 02] 某检察院有在编职工 51 人，现要从甲、乙、丙三人中选出一名先进工作者。在计票过程中，甲得 17 票，乙得 16 票，丙得 12 票。如果规定票数比其他二人都多的候选人才能当选，那么甲要确保当选最少要再得票（　　）。

A. 1 张　　B. 2 张　　C. 3 张　　D. 4 张

[**习题** 03] 100 名村民选一名代表，候选人是甲、乙、丙三人，每人只能投票选举一人，得票最多的人当选。开票中途累计前 61 张选票中，甲得 35 票，乙得 10 票，丙得 16 票。在尚未统计的选票中，甲至少再得多少票就一定当选？（　　）

A. 11　　B. 12　　C. 13　　D. 14

[**习题** 04] 254 个志愿者来自不同的单位，任意两个单位的志愿者人数之和不少于 20 人，且任意两个单位志愿者的人数不同，问这些志愿者所属的单位数最多有几个？（　　）

A. 17　　B. 15　　C. 14　　D. 12

[**习题** 05] 某班 40 名同学在期末考试中，语文、数学、英语三门课成绩优秀的分别有 32 人、35 人、33 人，三门课都优秀的人数至少是（　　）。

A. 32　　B. 28　　C. 24　　D. 20

[**习题** 06] 公司某部门 80％的员工有本科以上学历，70％有销售经验，60％在生产一线工作过。该部门既有本科以上学历，又有销售经历，还在生产一线工作过的员工至少占员工的（　　）。

A. 20％　　B. 15％　　C. 10％　　D. 5％

[**习题** 07] 某中学初二年级共有 620 名学生参加期中考试，其中语文及格的有 580 名，数学及格的有 575 名，英语及格的有 604 名，以上三门功课都及格的至少有多少名同学？（　　）

A. 575　　B. 558　　C. 532　　D. 519

[**习题** 08] 共有 100 人，参加某公司的招聘考试，考试的内容共有 5 道题，1—5 题分别有 80、92、86、78 和 74 人答对，答对 3 道和 3 道以上的人员能通过考试，请问至少有多少人能通过这次考试？（　　）

A. 30　　B. 55　　C. 70　　D. 74

[习题 09] 某中学在高考前夕进行了四次语文模拟考试，第一次得 90 分以上的学生为 70%，第二次是 75%，第三次是 85%，第四次是 90%，请问在四次考试中都是 90 分以上的学生至少是多少？(　　)

A. 40%　　B. 30%　　C. 20%　　D. 10%

[习题 10] 某数学竞赛共 160 人进入决赛，决赛共 4 题，做对第一题的有 136 人，做对第二题的有 125 人，做对第三题的有 118 人，做对第四题的有 104 人，那么在决赛中至少几个人是满分？(　　)

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

参考答案及解析

[习题 01] C　**[解析]** 要想使得已经就座的人尽可能的少，又要使得每个空座都有人与之相邻，我们应该构造如下形式：空人空空人空空人空空人空空人空……其实这就相当于每个人占了 3 个座。那么，想要占满 65 个座，至少要有 22 个人。

[习题 02] C　**[解析]** 乙是甲最大的竞争对手，除了丙得到 12 票外还有 39 票，甲需要得到这其中的过半数才能保证当选，即 20 票。而他已经得到了 17 票，还需要 3 票，选择 C。

[习题 03] A　**[解析]** 丙对甲的威胁最大，除了乙的 10 票，还剩 100－10＝90(票)，甲必须得到 90 票中的多半数(即 46 票)，才能确保高于丙。所以还要再得 46－35＝11(票)。

[习题 04] B　**[解析]** 要使单位数尽可能多，需要每个单位人数尽可能少，但最少的两个加起来也不能低于 20，我们构造分别为 9 和 11，那么其他单位分别为 12、13、14…一直加到 24 时，总和为 $9+(11+24)\times 14\div 2=254$，共 15 个单位。

[习题 05] D　**[解析]** 三门课分别有 8、5、7 名学生非优秀，总共 20 人次，所以至少还有 40－20＝20(人)三门课都优秀。

[习题 06] C　**[解析]** 不满足这三个条件的人员分别有 20%、30%、40%，我们把总比例 20%＋30%＋40%＝90%分配给不同的员工，以保证满足三个条件的员工尽量的少，还有至少 10%的员工满

足这三个条件。

[习题 07] D **[解析]** 三门功课不及格的分别有 40、45、16 人，共 101 人次，那么至少还有 620－101＝519(人)三门都及格。

[习题 08] C **[解析]** 1—5 题分别有 20、8、14、22、26 人答错，共 90 人次。这 90 人次的错题最多可以分配给 30 个人，使得这 30 个人每人错 3 道(恰好不通过)，那么至少还有 100－30＝70(人)肯定会通过。

[习题 09] C **[解析]** 设共有 100 人考试，则得 90 分以上的同学依次有 70、75、85、90 人，因此没到 90 分的依次有 30、25、15、10 人，如果这些人都是不同的人，那么没到 90 分的最多有 30＋25＋15＋10＝80(人)，故 90 分以上的至少有 100－80＝20(人)，占 20%。

[习题 10] A **[解析]** 四道题答错的分别有 24、35、42、56 人，共 24＋35＋42＋56＝157(人次)，尽量分给不同的人以保证得满分的人尽可能的少，那么至少还有 160－157＝3(人)得满分。

阅读笔记

阅读笔记

阅读笔记

阅读笔记

阅读笔记

阅读笔记

阅读笔记

阅读笔记

阅读笔记

阅读笔记

阅读笔记

阅读笔记